Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 03. November 2003
Abgabe bis 11. November 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 4

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{h}$.

b) Die Mittelsenkrechten scheiden sich in einem Punkt $\mathfrak{m}$.

c) Der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ des Dreiecks, der Mittelsenkrechtenschnittpunkt $\mathfrak{m}$ und der Höhenschnittpunkt $\mathfrak{h}$ liegen auf einer Geraden.

d) Der Schwerpunkt teilt die Strecke von $\mathfrak{h}$ nach $\mathfrak{m}$ im Verhältnis 2:1.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien die Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist.

b) Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ linear unabhängig ist.

c) Es gilt $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal sind.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Betrachten Sie das von den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aufgespannte Spat (siehe Abbildung 1).

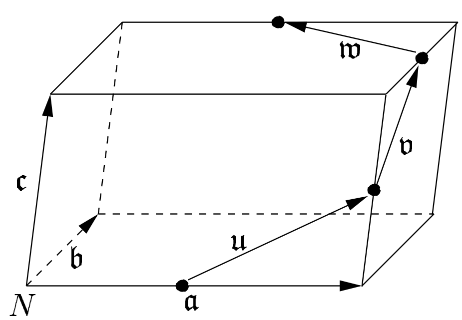

Abbildung 1: Das aufgespannte Spat mit den Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, welche die markierten Seitenmitten verbinden, in einer Ebene liegen. Betrachten Sie dazu $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei eine Orthonormalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ des Anschauungsraumes. Wir betrachten die in Parameterform $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + u\mathfrak{b}_1 + v\mathfrak{b}_2$ gegebene Ebene E mit

$$\mathfrak{a} = 3\mathfrak{e}_1 + 5\mathfrak{e}_2 - 2\mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{e}_1 + 2\mathfrak{e}_2 + 3\mathfrak{e}_3 \text{ und } \mathfrak{b}_2 = 2\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 - 3\mathfrak{e}_3.$$

und $u, v \in \mathbb{R}$. Ferner betrachten wir drei weitere Punkte

$$\mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{e}_1 + 6\mathfrak{e}_2 + 13\mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{p}_2 = -15\mathfrak{e}_1 + 23\mathfrak{e}_2 - 8\mathfrak{e}_3 \text{ und } \mathfrak{p}_3 = 30\mathfrak{e}_1 - 22\mathfrak{e}_2 + 7\mathfrak{e}_3.$$

Berechnen Sie den Abstand der Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ zu der Ebene E.

Abgabeort: In den orangen Kästen mit der Nummer 10 und 15 auf dem D1-Flur.