Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 27. Oktober 2003
Abgabe bis 4. November 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 3

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei eine Ebene E in Hessescher Normalform $<\mathfrak{x}, \mathfrak{e}>= d$ mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ und einer reellen Zahl d. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Punkt $\mathfrak{p} = t\mathfrak{e}$.

a) Welchen Wert muss t annehmen, damit der Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Ebene E liegt?

b) Beweisen Sie, dass für einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene immer $|\mathfrak{x}| \geq t$ gilt.

c) Wann genau gilt in b) die Gleichheit?

Hinweis zu b): Betrachten Sie den Vektor $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ und $<\mathfrak{p}, \mathfrak{y}>$.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei von Null verschiedene Vektoren und für ein $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind orthogonal.

b) Es ist
$$t = -\frac{<\mathfrak{a}, \mathfrak{b}>}{|\mathfrak{b}|^2}.$$

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C.

a) Stellen Sie die Geradengleichungen der drei Winkelhalbierenden auf.

b) Bestimmen Sie rechnerisch einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{s}$ der Winkelhalbierenden.

c) Berechnen Sie den Abstand von $\mathfrak{s}$ zu den Dreiecksseiten.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis aus c).

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben seien zwei Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal sind, dann sind sie auch linear unabhängig.

b) Wenn $\mathfrak{a}$ orthogonal zu $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal zu $\mathfrak{c}$ ist, so ist auch $\mathfrak{a}$ orthogonal zu $\mathfrak{c}$.

c) Ein System von Vektoren, welches mindestens einen von Null verschiedenen Vektor enthält, besitzt ein linear unabhängiges Teilsystem.

d) Liegen die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht auf einer Ebene, so gilt entweder $<\mathfrak{a}, \mathfrak{b}>= 0$ oder $<\mathfrak{a}, \mathfrak{c}>= 0$ oder $<\mathfrak{b}, \mathfrak{c}>= 0$.

Abgabeort: In den orangen Kästen mit der Nummer 10 und 15 auf dem D1-Flur.