Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 26. Januar 2004
Besprechung ab dem 03. Februar 2004

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 14

AUFGABE 1:
Entscheiden Sie, ob die folgenden 10 Aussagen richtig (= 1) oder falsch (=0) sind. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie zwei Pluspunkte, für jede falsche zwei Minuspunkte. Enthalten Sie sich, so wird dieses mit 0 Punkten bewertet.

	Aussage	**0 / 1?**
1	Das Vektorprodukt von Vektoren des Anschaungsraumes ist kommutativ.	**0**
2	Eine linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ hat mindestens n Elemente.	**0**
3	Die Menge der ganzen Zahlen bildet mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper.	**0**
4	Ein lineares Gleichungssystem ist lösbar, falls sich die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A, b]$ auf Zeilenstufen bringen lässt.	**0**
5	Je zwei Matrizen lassen sich multiplizieren.	**0**
6	Für alle $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ gilt: $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$.	**0**
7	Die Menge $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 - 3 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.	**0**
8	Zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W mit $dim(V) \geq dim(W)$ sind isomorph.	**0**
9	Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Dann ist T linear abhängig, wenn $0 \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ gilt.	**0**
10	Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, so gilt für alle $v, w \in V : v+w \notin U, v \in U \Rightarrow w \notin U$.	**1**

AUFGABE 2:
Ergänzen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraum heißen linear abhängig, wenn

aus der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ folgt, daß wenigstens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit $\alpha_i \neq 0$.

b) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Teilmenge U von V heißt Unterraum von V, wenn

U 1) $0 \in U$ und

U 2) $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ und

U 3) $x \in U, r \in \mathbb{R} \Rightarrow r.x \in U$

gelten.

c) Nennen Sie vier Eigenschaften des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im Anschauungsraum:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für $x, y \in \mathbb{R}^3$.

2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

3. $\langle r.x, y \rangle = r \langle x, y \rangle$ für $r \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$.

4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

d) Formulieren Sie den Basisergänzungssatz: V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum.

Dann ist jeder Unterraum von V ebenfalls endlichdimensional. Ferner lässt sich jede Basis $u_1, \ldots, u_m$ zu einer Basis $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von V ergänzen ($n = dim(V)$).

e) Gegeben sei eine Ebene E durch die Gleichung $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle = b$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Der Abstand eines Punktes $\mathfrak{p}$ von E ist

$$\frac{1}{|\mathfrak{a}|} |\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \rangle - b|.$$

AUFGABE 3:
Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -w & + & 4x & + & 6y & + & 2z & = & b_1 \\ 5w & - & x & - & 3y & - & z & = & b_2 \\ 4w & + & 3x & + & 3y & + & z & = & b_3 \end{array}$$

über den reellen Zahlen.

a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

b) Für welche Vektoren $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist obige lineare Gleichungssystem lösbar? Geben Sie im lösbaren Fall die Lösungmenge an.

c) Erläutern Sie die Bestandteile Ihrer Lösungmenge.

Lösung:

a)

```
> A:=matrix(3,5,[-1,4,6,2,b1,5,-1,-3,-1,b2,4,3,3,1,b3]);
```

$$A := \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 6 & 2 & b1 \\ 5 & -1 & -3 & -1 & b2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & b3 \end{array}\right]$$

```
> A1:=gaussjord(A,1);
```

$$A1 := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -6 & -2 & -b1 \\ 0 & 19 & 27 & 9 & b2 + 5\,b1 \\ 0 & 19 & 27 & 9 & b3 + 4\,b1 \end{array}\right]$$

```
> A2:=gaussjord(A,2);
```

$$A2 := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19} \\ 0 & 1 & \frac{27}{19} & \frac{9}{19} & \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b3 - b1 - b2 \end{array}\right]$$

```
> A3:=gaussjord(A,3);
```

$$A3 := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19} \\ 0 & 1 & \frac{27}{19} & \frac{9}{19} & \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b3 - b1 - b2 \end{array}\right]$$

b)
Aus der Zeilenstufenform erkennen wir, dass das Gleichungssystem für Vektoren der folgenden Form $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b1 + b2 \end{pmatrix}$ lösbar ist. Für diesen Fall hat die Zeilenstufenform die Gestalt:

```
> A3[3,5]:=0;
```

$$A3_{3,5} := 0$$

```
> print(A3);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19} \\ 0 & 1 & \frac{27}{19} & \frac{9}{19} & \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nach Nullzeilenergänzen bekommen wir die Matrix

```
> A4:=extend(A3,1,0,0);
```

$$A4 := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19} \\ 0 & 1 & \frac{27}{19} & \frac{9}{19} & \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und nach Substitution der Nullen auf der Hauptdiagonalen durch -1 ergibt sich schließlich

```
> A4[3,3]:=-1; A4[4,4]:=-1;
```

$$A4_{3,3} := -1$$

$$A4_{4,4} := -1$$

$$A4 := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19} \\ 0 & 1 & \frac{27}{19} & \frac{9}{19} & \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungmenge ist also gegeben durch

```
> col(A4,5) + s1 * col(A4,3) + s2 * col(A4,4);
```

$$\left[\frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19},\ \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19},\ 0,\ 0\right] + s1\ \left[\frac{-6}{19},\ \frac{27}{19},\ -1,\ 0\right] + s2\ \left[\frac{-2}{19},\ \frac{9}{19},\ 0,\ -1\right]$$

mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

c)

Die Lösungsmenge besteht aus eine speziellen Lösung

```
> col(A4,5);
```

$$\left[\frac{b1}{19} + \frac{4\,b2}{19},\ \frac{b2}{19} + \frac{5\,b1}{19},\ 0,\ 0\right]$$

und den Linearkombinationen von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems

```
> col(A4,3); col(A3,4);
```

$$\left[\frac{-6}{19}, \frac{27}{19}, -1, 0\right]$$

$$\left[\frac{-2}{19}, \frac{9}{19}, 0, -1\right]$$

AUFGABE 4:
Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$? Was lässt sich hieraus für die Vektoren aus U folgern?

b) Gegen welche Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ lässt sich der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ austauschen, so dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht?

Lösung:
a)

```
> B := matrix(4,4,[1,1,-2,2, 3,2,-4,4, -1,0,-1,2, 2,0,-1,0]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(B,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(B,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(B,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(B,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform erkennen wir, dass alle vier Vektoren linear unabgängig sind. Die Dimension von U ist also 4. Als Unterraum des $\mathbb{R}^4$ der Dimension 4 muss dann $U = \mathbb{R}^4$ gelten. Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^4$

b)
Wir lösen das folgende Gleichungssystem, welche durch seine erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist

```
> C:=matrix(4,5,[1,1,-2,2,1, 3,2,-4,4,2, -1,0,-1,2,-1, 2,0,-1,0,1]);
```

$$C := \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C,1);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C,2);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C,3);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C,4);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Der Vektor v lässt sich also gegen die Vektoren v_2, v_3 oder v_4 austauschen, so dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht.

AUFGABE 5:
Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ und } U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von U_1+U_2. Was lässt sich dann für $dim(U_1 \cap U_2)$ sagen?

b) Geben Sie konkrete Unterräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^8$ mit $dim(U_1) = 3$ und $dim(U_2) = 5$ an *sowie* $dim(U_1 \cap U_2) = 2$.

Lösung:

a) Wir suchen eine maximal linear unabhängige Teilmenge von der Vektoren die $U_1 + U_2$ erzeugen. Dazu bringen wir folgende Matrix auf Zeilenstufenform

```
> E:=matrix(4,7,[1,0,-1,0,2,0,1, 1,2,1,1,2,0,1, 0,1,1,-1,0,1,1,
> 2,2,0,0,4,0,2]);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(E,7);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir erkennen, dass das System der Vektoren v_1, v_2, v_4, v_6 linear unabhängig ist und sich die anderen Vekoren als Linearkombination dieser vier Vektoren ergeben. Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_6 sind also eine Basis von $U_1 + U_2$, d.h. $dim(U_1 + U_2) = 4$.

Ohne weiteres Wissen (z.B. die Dimensionen von U_1 bzw. U_2) können keine Aussagen über die Dimension von $U_1 \cap U_2$ getroffen werden.

b) Wir betrachten die Unterräume

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

und

$$U_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}\}.$$

Leicht lassen sich obigen Forderungen nachweisen.

AUFGABE 6:
Es bezeichne $\{e_1, \ldots, e_5\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ und $\{e'_1, \ldots, e'_4\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Sei $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die durch lineare Forsetzung definierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $f(e_1) = e'_1 + e'_2, f(e_2) = e'_2 + e'_3, f(e_3) = e'_3 + e'_4, f(e_4) = e'_4 + e'_1, f(e_5) = e'_1 + e'_3$.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f.

b) Berechnen Sie $f(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Bestimme eine Basis von $Kern(f)$. Welche Dimension hat $Bild(f)$?

d) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit $dim(Kern(f)) = 3$.

Lösung:

a)

$$M(f) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Durch Matrixmultiplikation erhalten wir

$$f(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Wir bringen $M(f)$ auf zunächst Zeilenstufenform.

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>   gaussjord(F,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(F,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(F,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(F,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(F,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist nun auf quadratische Form zu bringen und zwar so, dass durch Ergänzen von Nullzeilen die Einsen sich auf der Hauptdiagonalen befinden.

```
> F1:=extend(gaussjord(F,5),1,0,0);
```

$$F1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das Ergsetzen von 0 durch -1 entlang der Hauptdiagonalen liefert uns die Matrix

```
> F1[4,4]:=-1;
```

$$F1_{4,4} := -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist die vierte Spalte der Matrix F1 eine Basis von Kern(f) [Lösung des homogenen Gleichungssystems!]. Nach dem Rangsatz gilt dann

$$dim(Bild(f)) = dim(V) - dim(Kern(f)) = 5 - 1 = 4$$

.

d) Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Die Linearität dieser Abbildung lässt sich leicht einsehen ($M(f) = [0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, x_4 e_3, x_5 e_4]$, e_3, e_4 Elemente der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$). Aus $f(v) = 0$ für ein $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ erhalten wir $x_4 = x_5 = 0$. Damit gilt weiter $v \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$. Wegen

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt also tatsächlich $dim(Kern(f)) = 3$.

AUFGABE 7:

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Cramerschen Regel.

b) Sei A eine Matrix aus $M_n(\mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$A \text{ ist invertierbar } \Rightarrow A^l \neq 0 \, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

a) Zunächst berechnen wir die Determinante von A:

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &\overset{Add.\,1.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \\ -2 & -4 & 7 \end{vmatrix} \\ &\overset{Entw.\,1.-Zeile}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -21 + 24 = 3 \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mittels der Cramer-Regel erhalten wir die erste Spalte von A^{-1}. Nach der Regel haben wir die folgenden drei Determinanten zu berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} &\overset{Entw.\,1.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &\overset{Entw.\,2.-Spalte}{=} (-1) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-6 + 4) = -(-2) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} &\overset{Entw.\,3.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Die erste Spalte von A^{-1} ist also $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Nun berechnen wir die zweite Spalte durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hier müssen wir die folgenden drei Determinanten berechnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,1.-Spalte}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-3+4) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,2.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3+4 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,3.-Spalte}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2-2) = 4$$

Die zweite Spalte von A^{-1} ist also $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Um die letzte Spalte der inversen Matrix zu erhalten benötigen wir die Lösung des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dazu bestimmen wir die folgenden drei Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,1.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2+2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,2.-Spalte}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(2+4) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{Entw.\,3.-Spalte}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1-2 = -3$$

Der dritte Spalte von A^{-1} lautet also $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Fassen wir die drei Ergebnisse zusammen so ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Beweis durch Induktion nach $l \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $l = 1$ ist nachzuweisen, dass $A \neq 0$ gilt. Wegen $A \cdot A^{-1} = E_n$ und $A \cdot 0 = 0$ ist diese Gleichung auch gültig.

Induktionvoraussetzung: Für ein festes aber beliebiges $l \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A \text{ ist invertierbar } \Rightarrow A^l \neq 0.$$

Induktionsschritt: Angenommen es gelte $A^{l+1} = 0$, dann ergibt sich $A \cdot A^l = 0$. Die Multiplikation dieser Gleichung mit A^{-1} liefert uns die Gleichung $A^l = A^{-1} \cdot 0 = 0$. Dieses ist ein Widerspruch zu der Induktionsvorrausetzung. Damit ist unsere Annahme falsch und es gilt tatsächlich $A^{l+1} \neq 0$.

Wenn sich klar gemacht wurde, dass aus der Invertierbarkeit einer Matrix A folgt, dass $A \neq 0$ gilt und eingesehen worden ist, dass $(A^l)^{-1} = (A^{-1})^l$ gilt, dann ist die Aussage auch gezeigt.

AUFGABE 8:
Sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben.

a) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(v_i) = i$, $1 \leq i \leq n$ an.

b) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $Kern(f) = \{0\}$ gilt, und beweisen Sie diese.

Lösung:

a) Per linearer Forsetzung existiert eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(v_i) = i$, $1 \leq i \leq n$. Ein beliebiges $v \in V$, welches durch $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ dargestellt ist, wird dabei auf $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot i \in \mathbb{R}$ abgebildet wird.

b) Behauptung: Es gilt $Kern(f) = \{0\}$ genau dann, wenn $n = 1$ ist.

Beweis: "$\Leftarrow$": Falls $n = 1$ gilt, so ist $v_1 \neq 0_V$ eine Basis von V. Für ein beliebiges $v = \alpha_1 v_1 \in V$ mit $f(v) = 0_{\mathbb{R}}$ gilt $0_{\mathbb{R}} = f(v) = f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1) = \alpha_1 \cdot 1 = \alpha_1$. Wir können also $v = 0$ schließen. Damit ist dann $Kern(f) \subseteq \{0\}$ gezeigt. Wegen der trivialen Teilmengenbeziehung $\{0\} \subseteq Kern(f)$ gilt dann auch $Kern(f) = \{0\}$.

"$\Rightarrow$": Wir nehmen an, dass $n \geq 2$ ist. Dann betrachten wir $v = v_2 - 2v_1$, wobei v_1, v_2 Elemente aus einer Basis von V sind. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von den Vektoren v_1 und v_2 gilt $v \neq 0$. Werten wir f an der Stelle v aus, so bekommen wir $f(v) = f(v_2 - 2v_1) = f(v_2) - 2f(v_1) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$. Der Vektor v liegt somit im Kern der linearen Abbildung f. Daher gilt $Kern(f) \neq \{0\}$ (Widerspruch!).

AUFGABE 9:
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Lösung: Wir berechnen der Reihe nach die Determinanten:

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{Entw.\,nach\,erster\,Zeile}{=} 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{Entw.\,nach\,erster\,Zeile}{=} 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot 4 - 0 \cdot 4) = 24$$

2) Wir formen zunächst die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

mittels durch Spaltenumformungen (Addition des entsprechenden Vielfachen der ersten Spalte zu den anderen), die die Determinante nicht ändern, um. Dann gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{Entw.\,nach\,erster\,Zeile}{=} 1 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

3) Durch Subtraktion des x_1-fachen der ersten Spalte zur zweiten und des x_1^2-fachen der ersten zur dritten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{Entw.\,nach\,erster\,Zeile}{=} 1 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_1^2) - (x_3 - x_1)(x_2^2 - x_1^2) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)[(x_3 + x_1) - (x_2 + x_1)] \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)
\end{aligned}$$