Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 28. Januar 2004

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 13

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -10 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

aus $M_4(\mathbb{R})$ invertierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die inverse Matrix an.

b) Gegeben sei die folgende obere Dreiecksmatrix

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \subseteq M_3(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: Falls D invertierbar ist, so ist D^{-1} wieder eine obere Dreiecksmatrix.

c) Gibt es in $M_2(\mathbb{R})$ Matrizen A, B mit den folgenden Eigenschaften:

$$A^2 = B^2 = -E_2 \text{ und } AB = -BA?$$

Lösung:

a)
```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[1,2,3,1, 1,3,3,2, 2,4,3,3, 1,1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=extend(A,0,4,0);
```

$$A1 := \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

```
> A1[1,5]:=1;
```

$$A1_{1,5} := 1$$

```
> A1[2,6]:=1;
```

$$A1_{2,6} := 1$$

```
> A1[3,7]:=1;
```

$$A1_{3,7} := 1$$

```
> A1[4,8]:=1;
```

$$A1_{4,8} := 1$$

```
> print(A1);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(A1,1);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(A1,2);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(A1,3);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 & \frac{-2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(A1,4);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Die Matrix A ist invertierbar. Das Inverse zu A ist

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

```
> B := matrix(4,4,[1,3,-3,0, 1,1,-3,2, 3,9,-10,5, -2,0,5,-1]);
```

$$B := \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -10 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

```
> B1:=extend(B,0,4,0);
```

$$B1 := \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

```
> B1[1,5]:=1;
```

$$B1_{1,5} := 1$$

```
> B1[2,6]:=1;
```

$$B1_{2,6} := 1$$

```
> B1[3,7]:=1;
```

$$B1_{3,7} := 1$$

```
> B1[4,8]:=1;
```

$$B1_{4,8} := 1$$

```
> print(B1);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -10 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(B1,1);
```

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(B1,2);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(B1,3);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -12 & \frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(B1,4);
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -12 & \frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Die Matrix B ist also nicht invertierbar.

b)
```
> C:=matrix(3,3,[a11,a12,a13, 0,a22,a23, 0,0,a33]);
```

$$C := \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 0 & 0 & a33 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=extend(C,0,3,0);
```

$$C1 := \left[\begin{array}{ccc|ccc} a11 & a12 & a13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a22 & a23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

```
> C1[1,4]:=1;
```

$$C1_{1,4} := 1$$

```
> C1[2,5]:=1;
```

$$C1_{2,5} := 1$$

```
> C1[3,6]:=1;
```

$$C1_{3,6} := 1$$

```
> print(C1);
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a11 & a12 & a13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a22 & a23 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C1,1);
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{a12}{a11} & \frac{a13}{a11} & \frac{1}{a11} & 0 & 0 \\ 0 & a22 & a23 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C1,2);
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{-a13\ a22 + a12\ a23}{a11\ a22} & \frac{1}{a11} & -\frac{a12}{a11\ a22} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a23}{a22} & 0 & \frac{1}{a22} & 0 \\ 0 & 0 & a33 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> gaussjord(C1,3);
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a11} & -\frac{a12}{a11\ a22} & \frac{-a13\ a22 + a12\ a23}{a11\ a22\ a33} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a22} & -\frac{a23}{a22\ a33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a33} \end{array}\right]$$

Das Inverse hat also die folgende Form

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a11} & -\frac{a12}{a11\ a22} & \frac{-a13\ a22 + a12\ a23}{a11\ a22\ a33} \\ 0 & \frac{1}{a22} & -\frac{a23}{a22\ a33} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a33} \end{bmatrix}$$

c) Wir zeigen zunächst die folgende Aussage:

Ist $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$, dann bilden die Vektoren x und Ax eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Aus Dimensionsgründen reicht es zu zeigen, daß x und Ax linear unabhängig sind. Angenommen die Vektoren x und Ax seien linear abhängig, so erhalten wir die folgende Kette von Folgerungen:

$$\begin{array}{ll} & x, Ax \text{ sind linear abhängig} \\ \Rightarrow & Ax = \lambda x \text{ mit } \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \overset{A\cdot}{\Rightarrow} & \underbrace{A^2}_{=-E_n} x = A\lambda x = \lambda \underbrace{(Ax)}_{=\lambda x} \\ \Rightarrow & -x = \lambda^2 x \\ \Rightarrow & (\lambda^2 + 1) \underbrace{x}_{\neq 0} = 0 \\ \Rightarrow & \lambda^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda^2 = -1 \text{ (Widerspruch, dies ist in } \mathbb{R} \text{ nicht möglich)} \end{array}$$

Somit sind im Falle $x \neq 0$ die Vektoren x und Ax linear unabhängig. □

Wir können also den Vektor $Bx \in \mathbb{R}^2$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren x und Ax schreiben, also

$$Bx = \mu_1 x + \mu_2 Ax$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Angenommen, es gäbe Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $A^2 = B^2 = -E_2$ und $AB = -BA$. Durch Multiplizieren der Gleichung mit B von links erhalten wir dann

$$\begin{array}{lcl} B^2 x & = & \mu_1 Bx + \mu_2 BAx \\ & \overset{AB=-BA}{=} & \mu_1 Bx - \mu_2 ABx \\ & \overset{Bx \text{ einsetzen}}{=} & \mu_1(\mu_1 x + \mu_2 Ax) - \mu_2 A(\mu_1 x + \mu_2 Ax) \\ & = & \mu_1^2 x + \mu_1\mu_2 Ax - \mu_2\mu_1 Ax - \mu_2^2 A^2 x \\ & \overset{A^2=-E_2}{=} & \mu_1^2 x + \mu_2^2 x \\ & = & (\mu_1^2 + \mu_2^2) x. \end{array}$$

Wegen $B^2x = -E_2x = -x$ folgt dann

$$-x = (\mu_1^2 + \mu_2^2)x$$

und hieraus, da $x \neq 0$ ist,

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = -1.$$

Für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ist diese Gleichung offensichtlich nicht lösbar. Wir haben also einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass es Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $A^2 = B^2 = -E_2$ und $AB = -BA$ gibt.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

b) Es sei die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^5 = 0$ gegeben. Wir setzen

$$B = E_n + A + A^2 + A^3 + A^4.$$

Zeigen Sie, dass B zu der Matrix $E_n - A$ invers ist.

c) Geben Sie eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $A^2 = 0$ an, die mehr als einen Eintrag $\neq 0$ hat.

Lösung:

a)

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[0,-1,2,-3,0,0,-2,1,0,0,0,-1,0,0,0,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AA:=multiply(A,A);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AAA:=multiply(A,AA);
```

$$AAA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AAAA:=multiply(A,AAA);
```

$$AAAA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Wir müssen $B(E_n - A) = E_n = (E_n - A)B$ zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} B(E_n - A) &= (E_n + A + A^2 + A^3 + A^4)(E_n - A) \\ &= E_nE_n + AE_n + A^2E_n + A^3E_n + A^4E_n \\ &\quad -E_nA - AA - A^2A - A^3A - A^4A \\ &= E_n + A + A^2 + A^3 + A^4 - A - A^2 - A^3 - A^4 - \underbrace{A^5}_{=0} \\ &= E_n \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} (E_n - A)B &= (E_n - A)(E_n + A + A^2 + A^3 + A^4) \\ &= E_nE_n - AE_n + E_nA - AA + E_nA^2 \\ &\quad -AA^2 + E_nA^3 - AA^3 + E_nA^4 - AA^4 \\ &= E_n - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + A^3 - A^4 + A^4 - \underbrace{A^5}_{=0} \\ &= E_n \end{aligned}$$

c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dann hat A mehr als einen Eintrag, der von Null verschieden ist, und es gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben seien die endlichdimensionalen Vektorräume V und W sowie eine surjektive lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$. Geben Sie eine lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ mit $f \circ g = 1_W$ an. *Hinweis: Satz 6.1*

b) Geben Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $AB = E_2$ an. Kann für ein solches B auch $BA = E_2$ gelten?

Lösung:

a) Da $f : V \longrightarrow W$ surjektiv ist, gibt es zu jedem $y \in W$ ein $x \in V$ mit $y = f(x)$. Sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis des endlichdimensionalen Vektorraums W. Da f surjektiv ist gibt es insbesondere zu jedem Basisvektor $w_i \in W$ ein Urbild $v_i \in V$, also $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Aufgrund des Satzes 6.1b) über die lineare Fortsetzung gibt es genau eine lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ mit $g(w_i) = v_i$ für für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Sei $w \in W$ beliebig, also $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Dann folgt für die Komposition $f \circ g$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(w) &= f(g(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m)) \\
&\overset{g\ linear}{=} f(\alpha_1 g(w_1) + \alpha_2 g(w_2) + \cdots + \alpha_m g(w_m))) \\
&= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m) \\
&\overset{f\ linear}{=} \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_m f(v_m) \\
&= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m \\
&= w
\end{aligned}$$

Somit gilt $f \circ g = 1_W$.

b) Wir wollen zur Bestimmung von B Aufgabenteil a) anwenden. Sei dazu

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto Ax$$

f ist offensichtlich linear. f ist auch surjektiv. Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem (z.B. mittels des Gauß-Algorithmus)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2x-y \\ 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

und sehen, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 2x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Urbilder von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind. Wir wählen die Standardbasis bestehend aus den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und bestimmen jeweils ein Urbild unter der Funktion f (Wir könnten an dieser Stelle auch eine beliebige andere Basis des $\mathbb{R}^2$ nehmen!). Gesucht ist also ein $x_1 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1) = Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ein $x_2 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_2) = Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten nach obiger Formel

$$x_1(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

und

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Für $s = 0$ und $t = 0$ erhalten wir die Vektoren

$$x_1 := x_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$x_2 := x_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Satz 6.1b) über die lineare Fortsetzung liefert uns die Existenz einer eindeutigen linearen Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad y \mapsto By$$

mit

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt, wobei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ ist.

Wir wissen schon, dass $B = M(g) = [g(e_1), g(e_2)] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ die Darstellungsmatrix bzgl. g ist.

Für den Fall, dass nicht die Standardbasis gewählt wurde, kann man B wie folgt bestimmen: Aus den obigen Gleichungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Auf diese Weise gilt tatsächlich $AB = E_2$, denn nach Aufgabenteil a) gilt

$$E_2 x = x = 1_{\mathbb{R}^2}(x) \overset{a)}{=} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(Bx) = ABx$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Klar ist auch, daß B von der Wahl der Urbilder abhängt. Jede Matrix B, die $AB = E_2$ genügt, ist von der Form

$$B(s,t) = \begin{pmatrix} 2+3s & -1+3t \\ -1-s & 1-t \\ -s & -t \end{pmatrix} \text{ mit } s,t \in \mathbb{R}$$

$BA = E_2$ kann nicht gelten, da daß Matrizenprodukt BA eine 3×3-Matrix ist.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**

Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^5$ sowie den Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Für welche $d \in \{1,2,3\}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mit $Kern(f) = U$ und $dim_{\mathbb{R}}\, Bild(f) = d$? Eine genaue Begründung ist erforderlich.

Lösung:

a)
```
> with(linalg):

> U:=matrix(4,4,[1,1,1,4, 3,1,-3,10, 5,1,-7,16, 3,-3,-15,6]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 10 \\ 5 & 1 & -7 & 16 \\ 3 & -3 & -15 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(U,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \\ 0 & -6 & -18 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(U,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieraus lesen wir ab, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Basis von U bilden.

b) Nach Aufgabenteil a) ist die Dimension von U gleich 2. Sei nun $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ eine lineare Abbildung mit $Kern(f) = U$. Dann gilt nach dem Rangsatz (Satz 8.2):

$$d = dim(Bild(f)) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Kern(f)) = 4 - 2 = 2$$

Hieraus schließen wir, dass für $d \in \{1, 3\}$ keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mit $Kern(f) = U$ existiert.

Wir wollen nun nachweisen, dass eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mit $Kern(f) = U$ und $d = 2$ existiert. Sei dazu $\{u_1.u_2\} \subset \mathbb{R}^4$ eine Basis von U. Diese können wir aufgrund des Basisergänzungssatzes (3.10) durch Hinzufügen geeigneter Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ des $\mathbb{R}^4$ ergänzen.
Wir wählen zwei linear unabhängige Vektoren w_1 und w_2 des $\mathbb{R}^5$. Dann gibt es aufgrund des Satzes 6.1b) über die lineare Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mit $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$, $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Wir wollen zeigen, dass f die gewünschten Eigenschaften hat.
Sei $x \in U = \langle u_1, u_2 \rangle$ beliebig, also $x = \alpha u_1 + \beta u_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir

$$f(x) = f(\alpha u_1 + \beta u_2) \overset{f\ linear}{=} \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

d.h. $x \in Kern(f)$, also $U \subseteq Kern(f)$.
Sei andersherum $x \in Kern(f) \subseteq \mathbb{R}^4$ beliebig, also $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2$ mit

$f(x) = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2) \\ &\overset{f\ linear}{=} \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(v_1) + \lambda_4 f(v_2) \\ &= \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2 \end{aligned}$$

Da w_1 und w_2 linear unabhängig sind, folgt $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = 0$ und somit $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$. Somit gilt auch $Kern(f) \subseteq U$, insgesamt also $Kern(f) = U$.
Wir müssen noch $d = dim(Bild(f)) = 2$ zeigen. Sei dazu $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 v_1 + \alpha_4 v_2 \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 v_1 + \alpha_4 v_2) \\ &\overset{f\ linear}{=} \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \alpha_3 f(v_1) + \alpha_4 f(v_2) \\ &= \underbrace{\alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2}_{\in \langle w_1, w_2 \rangle}. \end{aligned}$$

Somit bilden die Vektoren w_1 und w_2 ein Erzeugendensystem von $Bild(f)$. Aus der linearen Unabhängigkeit von w_1 und w_2 folgt nun, dass $\{w_1, w_2\}$ eine Basis von $Bild(f)$ ist. Somit $d = dim(Bild(f) = 2$.