Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 12. Januar 2004
Abgabe bis 20. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 12

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 6x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 7x_5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $Kern f$ und $Bild\, f$.

Lösung:

a) **Lemma:** Zu einem gegebenen $v \in \mathbb{R}^5$ und für alle $1 \leq i \leq 5$ ist die Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto x_i.v$$

linear.

Beweis: Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}) &= \tilde{f}(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \\ x_5 + y_5 \end{pmatrix}) = (x_i + y_i).v = x_i.v + y_i.v \\
&= \tilde{f}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) + \tilde{f}(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix})
\end{aligned}$$

$$\tilde{f}(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}) = \tilde{f}(\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\alpha x_3\\\alpha x_4\\\alpha x_5\end{pmatrix}) = (\alpha.x_i).v = \alpha.(x_i.v) = \alpha.\tilde{f}(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix})$$

$\square$

Das so eben bewiesene Lemma liefert uns, dass die folgenden linearen Abbildungen:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \mapsto x_1.\begin{pmatrix}1\\1\\6\\1\\7\end{pmatrix} ; \tilde{f}_2 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \mapsto x_2.\begin{pmatrix}2\\2\\8\\2\\10\end{pmatrix} ;$$

$$\tilde{f}_3 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \mapsto x_3.\begin{pmatrix}1\\4\\6\\4\\7\end{pmatrix} ; \tilde{f}_4 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \mapsto x_4.\begin{pmatrix}2\\8\\8\\8\\10\end{pmatrix} ;$$

$$\tilde{f}_5 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \mapsto x_5.\begin{pmatrix}1\\16\\6\\16\\7\end{pmatrix}$$

linear sind. Wegen

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5\\x_1+2x_2+4x_3+8x_4+16x_5\\6x_1+8x_2+6x_3+8x_4+6x_5\\x_1+2x_2+4x_3+8x_4+16x_5\\7x_1+10x_2+7x_3+10x_4+7x_5\end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix}x_1\\x_1\\6x_1\\x_1\\7x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x_2\\2x_2\\8x_2\\2x_2\\10x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_3\\4x_3\\6x_3\\4x_3\\7x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x_4\\8x_4\\8x_4\\8x_4\\10x_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_5\\16x_5\\6x_5\\16x_5\\7x_5\end{pmatrix} \\
&= x_1\begin{pmatrix}1\\1\\6\\1\\7\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\2\\8\\2\\10\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\4\\6\\4\\7\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}2\\8\\8\\8\\10\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}1\\16\\6\\16\\7\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

können wir ferner $f = \tilde{f}_1+\tilde{f}_2+\tilde{f}_3+\tilde{f}_4+\tilde{f}_5$ folgern. Als Summe von linearen Abbildungen ist f dann nach Satz 5.5 (2) wiederum eine lineare Abbildung.

Ein sehr kurzes Argument, warum f lineare Eigenschaften hat, ist das Folgende. Wir erkennen, dass $f(x) = Ax$ mit $A \in M_5(\mathbb{R})$ gilt (A beinhalte die Koeffizienten der x_i). Nach Satz 6.6 (b) ist dann f eine lineare Abbildung.

b) Wir betrachten zunächst $Bild\, f$ näher:

$$\begin{aligned} Bild\, f &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 6x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 7x_5 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 6x_1 \\ x_1 \\ 7x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 \\ 8x_2 \\ 2x_2 \\ 10x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ 4x_3 \\ 6x_3 \\ 4x_3 \\ 7x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_4 \\ 8x_4 \\ 8x_4 \\ 8x_4 \\ 10x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_5 \\ 16x_5 \\ 6x_5 \\ 16x_5 \\ 7x_5 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 6 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

Um eine Basis von $Bild\, f$ zu bestimmen, stehen wir vor der Aufgabe aus den Vektoren, die den Unterraum $Bild\, f$ erzeugen eine maximal (bzgl. $\subseteq$) lineare unabhängig Teilmenge zu finden. Dieses Problem können wir mit dem Gauss-Algorithmus lösen.

```
> Bild := multiply(A,B);
```

$$Bild := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 7 & 10 & 7 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(Bild,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(Bild,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(Bild,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(Bild,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(Bild,5);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aus der Matrix in Zeilenstufenform erkennen wir, dass die ersten drei Spalten und damit die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Aus den Spalten vier und fünf entnehmen wir, dass es sich auch um eine maximal linear unabhängige Teilmenge handelt. Damit bilden also diese Vektoren eine Basis von $Bild\, f$.

Nun schauen wir uns den Unterraum $Kern\, f$ näher an:

$$\begin{aligned} Kern\, f &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 6x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 7x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass $Kern\, f$ die Lösung eines Gleichungssystems ist, dessen Zeilenstufenform wir vorhin berechnet haben. Wir fahren daher mit dem Gauss-Algorithmus fort. Die Nullen auf der Hauptdiagonale werden durch -1 ersetzt. Dann wissen wir, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $Kern\, f$ bilden.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten Vektorräume V und W der Dimension n bzw. m. Beweisen Sie:

a) Für $n \leq m$ gibt es eine injektive lineare Abbildung von V nach W.

b) Für $n \geq m$ gibt es eine surjektive lineare Abbildung von V nach W.

Lösung:

a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W mit $n \leq m$. Wir definieren $f : V \longrightarrow W$ durch lineare Fortsetzung (Satz 6.1). Es reicht daher $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ anzugeben. Wir setzen nun

$$(*) \quad f(v_i) = w_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Behauptung: Die lineare Abbildung f ist injektiv!

Beweis: Sei dazu $f(x) = f(y)$ mit $x, y \in V$. Stellen wir die Vektoren x, y bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ dar, so erhalten wir $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Wenn wir $x = y$ gezeigt haben, so haben wir die Behauptung bewiesen. Die folgenden Umformungen

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(y) & \Leftrightarrow & f(x) - f(y) = 0_W \\ & \Leftrightarrow & f(x - y) = 0_W \\ & \Leftrightarrow & f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i) = 0_W \\ & \Leftrightarrow & f(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i) = 0_W \\ & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) f(v_i) = 0_W \\ & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) w_i = 0_W \\ & \overset{w_i\, lin.\, unab.}{\Rightarrow} & \alpha_i - \beta_i = 0 \end{array}$$

lassen uns für $1 \leq i \leq n$ zunächst die Gleichung $\alpha_i = \beta_i$ und dann $x = y$ erkennen.

b) Sei nun $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W mit $n \geq m$. Wir definieren $f : V \longrightarrow W$ wie in a) mittels linearer Fortsetzung (Satz 6.1) durch Angabe von

$$(**) \quad f(v_i) = \begin{cases} w_i & \text{für } 1 \leq i \leq m \\ 0_W & \text{für } m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Behauptung: Diese lineare Abbildung f ist surjektiv.

Beweis: Sei dazu $w \in W$ beliebig. Dann lässt sich $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.w_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ schreiben (Basiseigenschaft). Nun können wir aufgrund von $w_i = f(v_i)$ für $i = 1, \ldots, m$ auch $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.f(v_i)$ schreiben. Aus der Rechenregel 5.2 (4) ergibt sich die Gleichung $w = f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i.v_i)$. Der Vektor $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.v_i \in V$ ist also ein Urbild von $w \in W$. Die lineare Abbildung f ist damit surjektiv.

Anmerkung: Die Aufgabe kann auch wie folgt gelöst werden. Die obigen Behauptungen werden zunächst für die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gezeigt (Die linearen Abbildungen werden auf der Standardbasis wie oben definiert). Der Satz 5.9 lässt uns $V \cong \mathbb{R}^n$ und $W \cong \mathbb{R}^m$ erkennen. Dann sind nur noch die Kompositionen der Abbilungen zu betrachten, um eine Abbildung von V nach W mit der entsprechenden Eigenschaft zu erhalten. Klar sollte dann sein, dass eine Komposition von einer surjektiven (injektiven) Abbildung mit einer bijektiven Abbildung wieder surjektiv (injektiv) ist.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben seien zwei lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von f, g und $g \circ f$.

b) Gegeben sei die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{pmatrix}$ einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $f(x)$ mit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Um die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasis $e_1, \ldots, e_4$ des $\mathbb{R}^4$ zu erhalten müssen wir die folgenden Ausdrücke bestimmen

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ und } f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Durch Einsetzen in die Abbildungsvorschrift bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasis lautet also

$$M(f) = (f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir durch Bestimmen von $g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die Darstellungsmatrix von g, sie lautet

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix von $g \circ f$ ergibt sich nach Satz 6.7 (3) durch das Matrixprodukt von $M(g)$ und $M(f)$. Das Ergebnis lautet:

$$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 & -16 & -2 \\ 15 & 22 & -18 & -14 \\ -16 & -18 & 19 & 4 \\ -2 & -14 & 4 & 24 \end{pmatrix}.$$

b) Aus der Darstellungsmatrix entnehmen wir

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}; f(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix}; f(e_4) = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 81 \end{pmatrix} \text{ und } f(e_5) = \begin{pmatrix} 11 \\ 32 \\ 243 \end{pmatrix}.$$

Aus der Darstellung $x = e_1 - e_2 + 2.e_3 - 2.e_4 + e_5$ und der Linearität von f erhalten wir

$$f(x) = f(e_1 - e_2 + 2.e_3 - 2.e_4 + e_5) = f(e_1) - f(e_2) + 2.f(e_3) - 2.f(e_4) + f(e_5)$$

und durch Ausrechnen

$$f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 129 \end{pmatrix}.$$

Aus der Tatsache $Ae_i = s_i$, $1 \leq i \leq n$ für eine Matrix $A = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$ (siehe Satz 6.4 (1)) erkennen wir, dass wir $f(x)$ auch durch das folgende Matrixprodukt berechnen können.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 129 \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen hieraus $f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 129 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Geben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

a) $V = Kern\, f + Bild\, f$

b) $Kern f \cap Bild\, f = \{0\}$.

Geben Sie konkret eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $f \circ f = f$ an, die zusätzlich $Kern\, f \neq \{0\} \neq Bild\, f$ erfüllt.

Lösung:

a) Wir wissen, dass $Kern\, f$, $Bild\, f$ und $Kern\, f + Bild\, f$ Unterräume von V sind. Damit gilt also $Kern\, f + Bild\, f \subseteq V$. Für die andere Teilmengenbeziehung stellen wir das Element x aus V wie folgt dar

$$x = (x - f(x)) + f(x).$$

Ohne Frage ist $f(x)$ ein Element des Unterraumes $Bild\, f$. Werten wir die lineare Abbildung f an der Stelle $x - f(x)$ aus so bekommen wir

$$f(x - f(x)) \overset{f\, linear}{=} f(x) - f(f(x)) \overset{f \circ f = f}{=} f(x) - f(x) = 0.$$

Daher ist $x - f(x) \in Kern\, f$ gültig. Wir haben hier also $V \subseteq Kern\, f + Bild\, f$ gezeigt. Insgesamt können wir $V = Kern\, f + Bild\, f$ folgern.

b) Sei $x \in Kern f \cap Bild\, f$. Aus der Definition des Kernes ergibt sich $f(x) = 0$ und aus der Defintion des Bildes bekommen wir Darstellung $x = f(y)$ mit $y \in V$. Wir betrachten nun $f(x) = f(f(y)) = (f \circ f)(y) \overset{f \circ f = f}{=} f(y)$. Damit gilt dann $x = f(y) = f(x) = 0$. Im Schnitt der Unterräume $Kern\, f$ und $Bild\, f$ kann also nur die Null liegen.

Ein konkretes Beispiel: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

1. Wir sehen sofort, dass f linear ist (vergleiche Lemma in der Lösung von Aufgabe 1).

2. Für einen belieben Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(f \circ f)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}).$$

Die Abbildung f hat also die verlangte Eigenschaft $f \circ f = f$.

3. Es ist leicht zu sehen, dass $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$ gilt. Damit folgt weiter $Kern\, f = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$.

4. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist wegen $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Element von $Bild\, f$. Damit gilt auch $Bild(f) \neq \{0\}$.