Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 12. Januar 2004
Abgabe bis 13. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 11

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, wobei $n \geq 2$ ist. Ferner seien für $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \text{ und } y_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

gegeben. Beweisen Sie, dass beim Austauschen der Vektoren v_1, v_2 durch die Vektoren y_1, y_2 genau dann eine Basis entsteht, falls $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$ gilt.

Lösung:

$\Leftarrow$: Es gelte $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$. Sei $y_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_2 v_n$ die Darstellung von y_1 bezüglich der vorgegebenen Basis $v_1, \dots, v_n$. Die Annahme $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ führt zu $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0\beta_2 - \beta_1 0 = 0$. Da dieses nicht sein kann, gilt also $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\alpha_1 \neq 0$ ist. Dann erhalten wir durch Anwenden des Austausch-Lemmas die Basis $y_1, v_2, \dots, v_n$. Es lässt sich somit $y_2 = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$ schreiben. Mittels der Darstellung $y_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ erhalten wir durch Gleichsetzen

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$$

und durch Umformen

$$\beta_1 v_1 = \gamma_1 y_1 + (\gamma_2 - \beta_2) v_2 + \cdots (\gamma_n - \beta_n) v_n.$$

Setzen wir nun $y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ in diese Gleichung ein so bekommen wir

$$\beta_1 v_1 = \gamma_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + (\gamma_2 - \beta_2) v_2 + \cdots (\gamma_n - \beta_n) v_n$$

und durch Sortieren der Koeffizienten

$$0 = (\gamma_1\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\gamma_2 - \beta_2 + \gamma_1\alpha_2) v_2 + \cdots (\gamma_n - \beta_n + \gamma_1\alpha_n) v_n.$$

Da die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt

$$\gamma_1\alpha_1 - \beta_1 = 0 \text{ und } \gamma_2 - \beta_2 + \gamma_1\alpha_2 = 0$$

bzw.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \text{ und } \beta_2 = \gamma_2 + \gamma_1\alpha_2.$$

Angenommen $\gamma_2 = 0$. Dann erhalten wir $\beta_2 = \gamma_1\alpha_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2$ und somit $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$ (Widerspruch). Also gilt $\gamma_2 \neq 0$ und somit kann y_2 gegen v_2 ausgetauscht werden.

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass sich v_1 und v_2 gegen die Vektoren y_1 und y_2 austauschen lassen. Es muss dann $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$ gelten, da ansonsten nicht v_1 und v_2 nicht gegen die Vektoren y_1 und y_2 ausgetauscht werden können. Wir nehmen ohne Einschränkung $\alpha_1 \neq 0$ an. Nachdem wir y_1 augetauscht haben erhalten wir die Gleichung

$$y_2 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots \gamma_n v_n$$

mit $\gamma_2 \neq 0$ (Die Annahme $\gamma_2 = 0$ würde zu dem Widerspruch führen, dass y_2 nicht gegen v_2 ausgetauscht werden kann). Wie die Umformungen in "$\Leftarrow$:" zeigen, ergeben sich die Gleichungen

$$\beta_1 = \gamma_1 \alpha_1 \text{ und } \beta_2 = \gamma_2 + \gamma_1 \alpha_2.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 &= \alpha_1(\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2) - \beta_1\alpha_2 \\
&= \alpha_1\gamma_2 + \underbrace{\alpha_1\gamma_1}_{=\beta_1}\alpha_2 - \beta_1\alpha_2 \\
&= \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\alpha_2 - \beta_1\alpha_2 \\
&= \alpha_1\gamma_2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

da $\alpha_1 \neq 0$ und $\gamma_2 \neq 0$ sind.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**

a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, dass für Unterräume $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ der Dimension $n-1$ die Formel

$$dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m) \geq n - m$$

gilt.

b) Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ Unterräume der Dimension 3. Welche Dimensionen können $U_1 \cap U_2$ bzw. $U_1 + U_2$ haben? Geben Sie für jede auftretende Dimensionszahl von $U_1 \cap U_2$ ein konkretes Beispiel an.

Lösung:

a) Beweis durch Induktion nach m.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ erhalten wir $dim(U_1) = n - 1 \geq n - 1 = n - m$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $m \in \mathbb{N}$ gelte

$$dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m) \geq n - m.$$

Induktionsschritt: $(m \to m+1)$ Zunächst bemerken wir, dass für zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ die Dimension des Unterraums $U + W$ von V durch $n = dim(V)$ nach oben beschränkt ist (Satz 3.11). Nach Satz 3.12 gilt mit $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$ und $W = U_{m+1}$:

$$\begin{aligned}
dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m \cap U_{m+1}) &= dim(U) + dim(U_{m+1}) - dim(U+W) \\
&\geq dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m) + dim(U_{m+1}) - n \\
&\underset{(Ind.vor.)}{\geq} n - m + dim(U_{m+1}) - n \\
&= n - m + n - 1 - n \\
&= n - m - 1 \\
&= n - (m+1)
\end{aligned}$$

b) Als Unterraum von U_2 gilt nach Satz 3.11 $d := dim(U_1 \cap U_2) \leq dim(U_2) = 3$. Der Satz 3.11 liefert ferner, dass die Dimenion des Unteraumes $U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ kleiner oder gleich 5 ist. Mit Satz 3.12 erkennen wir $dim(U_1 \cap U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 + U_2) \geq 3 + 3 - 5 = 1$. Der Schnitt der Unterräume U_1 und U_2 kann die Dimension $1, 2$ oder 3 haben. Wir haben schon $dim(U_1 + U_2) \leq 5$ gesehen. Aus der Dimensionsformel erhalten wir wegen $dim(U_1 \cap U_2) \leq 3$: $dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2) \geq 3 + 3 - 3 = 3$. Damit haben wir $dim(U_1 + U_2) \in \{3, 4, 5\}$ gezeigt.

$d = 1$: Wir setzen $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Dann gilt $dim(U_1) = dim(U_2) = 3$ und $U_1 \cap U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ bzw. $dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

$d = 2$: Wir setzen $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Dann gilt $dim(U_1) = dim(U_2) = 3$ und $U_1 \cap U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Ferner ist es keine Schwierigkeit $dim(U_1 \cap U_2) = 2$ einzusehen.

$d = 3$: Hier kann nur ein Beispiel auftreten, bei dem $U_1 = U_2$ ist. Denn aus $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$ mit $dim(U_1 \cap U_2) = 3 = dim(U_2)$ folgt mit Satz 3.11 $U_1 \cap U_2 = U_2$. Ebenso lässt sich $U_1 \cap U_2 = U_1$ einsehen. Ein Beispiel ist also $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = U_2$.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir betrachten die folgenden Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq V^3.$$

a) Weisen Sie nach, dass U ein Unterraum von V^3 ist.

b) Bestimmen Sie mit einer Basis $v_1, \cdots, v_n$ von V eine Basis von U.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $dim(U)$ und $dim(V)$?

Lösung:

a) Wir überprüfen die Unterraumaxiome (Definition 2.1).

(U 1) Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist wegen $0_V + 0_V + 0_V = 0_V$ in U enthalten.

(U 2) Seien nun $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$. Dann gelten die Gleichungen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Durch Addieren der beiden Gleichungen und den Vektorraumgesetzen erhalten wir $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$. Damit ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in U$.

(U 3) Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$. Dann gilt die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Mit den Vektorrraumgesetzen bekommen wir die Gleichung $r.x_1 + r.x_2 + r.x_3 = r.(x_1 + x_2 + x_3) = r.0 = 0$. Hieraus ergibt sich $r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ rx_3 \end{pmatrix} \in U$.

b) Beh: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix}$$

mit $v_1, \ldots, v_n \in V$ bilden eine Basis von U.

(i) Die Vektoren sind linear unabhängig in V^3. Seien also $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n} \in \mathbb{R}$ und es gelte

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{n+1} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{2n} \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch komponentenweise Addition erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \alpha_{n+i} v_i \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_{n+i} v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und dann die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

sowie

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{n+i} v_i = 0.$$

Mittels der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ können wir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

sowie

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \cdots = \alpha_{2n} = 0$$

folgern. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

(ii) Die Vektoren erzeugen auch U. Es ist leicht zu sehen, dass sämtliche Vektoren in U liegen. Aus der in Teil a) gezeigten Unterraumeigenschaft bekommen wir dann

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq U.$$

Wir weisen nun auch die andere Teilmengenbeziehung nach. Sei dazu $x \in U$ beliebig. Dann lässt sich $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_1, x_2, x_3 \in V$ schreiben. Stellen wir nun x_1, x_2 und x_3 als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ dar, so erhalten wir die Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i = 0$ bzw. $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) v_i = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit können wir $\alpha_i = -\beta_i - \gamma_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ folgern. Der Vektor x lässt sich dann wie folgt darstellen

$$x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (-\beta_i - \gamma_i) v_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \end{pmatrix}.$$

bzw.

$$x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (-\beta_i) v_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (-\gamma_i) v_i \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \end{pmatrix}.$$

Das Aufspalten der Summen führt uns zu

$$\begin{aligned} x &= (-\beta_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\beta_2) \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots (-\beta_n) \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ (-\gamma_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} + (-\gamma_2) \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix} + \cdots (-\gamma_n) \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$x \in \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix} \rangle,$$

also

$$U \subseteq \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ -v_n \end{pmatrix} \rangle.$$

c) Aus b) ergibt sich $dim(U) = 2 \cdot n = 2 \cdot dim(V)$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

a) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{R}$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 - 2 \\ -3x_3 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Es gelten

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i + y_i) \overset{DG\,KG\,in\,\mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und

$$f(\lambda.x) = \sum_{i=1}^n a_i(\lambda x_i) \overset{AG,KG,DG\,in\,\mathbb{R}}{=} \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i = \lambda.f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit ist f eine lineare Abbildung.

b) Wir setzen $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x) + f(y).$$

Somit liegt also keine lineare Abbildung vor.

c) Es gelten

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ -(x_3+y_3) \\ (x_4+y_5) \end{pmatrix} \overset{AG,KG\, in\, \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ -y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = f(x)+f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und

$$f(\lambda.x) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ -\lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1+x_2) \\ -\lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (x_1+x_2) \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda.f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit ist f eine lineare Abbildung.

d) Wir betrachten $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $\lambda = 2$ erhalten wir

$$f(2.x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$2.f(x) = f(x) + f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $2.f(x) \neq f(2.x)$ ist f keine lineare Abbildung.