Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 5. Januar 2004
Abgabe bis 13. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 10

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Für $T \subseteq A$ und $S \subseteq B$ betrachten wir die Mengen

$$f(T) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in T\}$$

und

$$f^{-1}(S) = \{x \mid x \in A \text{ mit } f(x) \in S\}.$$

Seien $T_1, T_2 \subseteq A$ und $S_1, S_2 \subseteq B$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

a) $f(T_1 \cup T_2) = f(T_1) \cup f(T_2)$

b) $f(T_1 \cap T_2) = f(T_1) \cap f(T_2)$

c) $f^{-1}(S_1 \cup S_2) = f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2)$

d) $f^{-1}(S_1 \cap S_2) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2)$

Lösung:

a) Sei $y \in f(T_1 \cup T_2)$, dann gibt es ein $x \in T_1 \cup T_2$ mit $y = f(x)$. Damit gilt aber auch $y = f(x)$ und $x \in T_1$ oder $y = f(x)$ und $x \in T_2$. Dieses bedeutet nach Definition der Menge $f(T)$ nichts anderes als $y \in f(T_1) \cup f(T_2)$. Die andere Teilmengenbeziehung ergibt sich, wie folgt: Sei dazu $y \in f(T_1) \cup f(T_2)$, dann befindet sich $y \in f(T_1)$ oder $y \in f(T_2)$. Es gibt also ein $x_1 \in T_1$ mit $f(x_1) = y$ oder ein $x_2 \in T_2$ mit $f(x_2) = y$. Das Element y lässt sich also durch $f(x)$ für ein $x \in T_1 \cup T_2$ darstellen, d.h. $y \in f(T_1 \cup T_2)$. Die Aussage ist somit **gültig**.

b) Wir betrachten die Abbildung $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 3\}$ mit $f(1) = f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 1$ und $f(5) = 3$. Mit $T_1 = \{1, 2, 3\}$ und $T_2 = \{3, 4, 5\}$ bekommen wir $f(T_1) = \{1, 3\}$, $f(T_2) = \{1, 3\}$. Damit gilt also $f(T_1) \cap f(T_2) = \{1, 3\}$. Aus $T_1 \cap T_2 = \{3\}$ und $f(T_1 \cap T_2) = \{f(3)\} = \{3\}$ sehen wir dass $f(T_1 \cap T_2) \neq f(T_1) \cap f(T_2)$ gilt. Die Aussage ist somit **nicht gültig**

Anmerkung: Ein anderes Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf den reellen Zahlen mit $T_1 = (-\infty, 0)$ und $T_2 = (0, \infty)$. Dann gilt $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, aber wegen $1 = 1^2 = (-1)^2$ gilt $1 \in f(T_2)$ sowie $1 \in f(T_1$ und damit auch $f(T_1) \cap f(T_2) \neq \emptyset$.

c) Sei $x \in f^{-1}(S_1 \cup S_2)$, dann liegt $f(x)$ entweder in S_1 oder in S_2. Dieses bedeutet nach Definition $x \in f^{-1}(S_1)$ oder $x \in f^{-1}(S_2)$. Damit gilt also $x \in f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2)$. Für die andere Teilmengenbeziehung sei nun $x \in f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2)$, d.h. $x \in f^{-1}(S_1)$ oder $x \in f^{-1}(S_2)$. Per Definition von $f^{-1}(S_1)$ bzw. $f^{-1}(S_1)$ können wir $f(x) \in S_1$ oder $f(x) \in S_2$ folgern. Das Element $f(x)$ befindet sich also in $S_1 \cup S_2$. Wir erhalten dann $x \in f^{-1}(S_1 \cup S_2)$. Damit **gilt** die Aussage.

d) Sei $x \in f^{-1}(S_1 \cap S_2)$, dann liegt $f(x) \in S_1$ und $f(x) \in S_2$. Dieses bedeutet nach Definition $x \in f^{-1}(S_1)$ und $x \in f^{-1}(S_2)$. Damit gilt also $x \in f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2)$. Für die andere Teilmengenbeziehung sei nun $x \in f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2)$, d.h. $x \in f^{-1}(S_1)$ und $x \in f^{-1}(S_2)$. Per Definition von $f^{-1}(S_1)$ bzw. $f^{-1}(S_1)$ können wir $f(x) \in S_1$ und $f(x) \in S_2$ folgern. Das Element $f(x)$ befindet sich also in $S_1 \cap S_2$. Wir erhalten dann $x \in f^{-1}(S_1 \cap S_2)$. Die Aussage ist also **wahr**.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } b_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Möglichkeiten an, wie Sie die linear unabhängigen Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 unter 2-facher Anwendung des Austauschlemmas zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen können.

Lösung:
Wir berechnen zunächst mittels des Gauss-Algorithmus die Darstellung von v_1 und v_2 bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4:

```
> A :=matrix(4,4,[1,2,-3,-4,-3,-2,1,5,4,-4,-3,-5,-1,-2,-4,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

```
> KA :=
> matrix(4,5,[1,2,-3,-4,1,-3,-2,1,5,-4,4,-4,-3,-5,7,-1,-2,-4,-1,-1]);
```

$$KA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> KA1 := addrow(KA,1,2,3):
> KA2:= addrow(KA1,1,3,-4);
```

$$KA2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 11 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> KA3 := addrow(KA2,1,4,1):
> KA4 := addrow(KA3,2,1,-1/2);
```

$$KA4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KA5 := addrow(KA4,2,3,3):
> KA6 := mulrow(KA5,2,1/4);
```

$$KA6 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KA7 := mulrow(KA6,3,-1/15):
> KA8 := addrow(KA7,3,2,2);
```

$$KA8 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KA9 := addrow(KA8,3,1,-1):
> KA10 := addrow(KA9,3,4,7);
```

$$KA10 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KA11 := mulrow(KA10,4,-3):
> KA12 := addrow(KA11,4,3,-2/3);
```

$$KA12 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KA13 := addrow(KA12,4,2,5/12):
> KA14 := addrow(KA13,4,1,7/6);
```

$$KA14 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit lässt sich also v_1 wie folgt darstellen

$$v_1 = \frac{3}{2}b_1 + (-\frac{1}{4})b_2 + 0b_3 + 0b_4.$$

Berechnen wir nun die Darstellung des Vektors v_2.

```
> B := matrix(4,4,[1,2,-3,-4,-4,-2,1,5,7,-4,-3,-5,-1,-2,-4,-1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -4 & -2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

```
> KB :=
> matrix(4,5,[1,2,-3,-4,-5,-3,-2,1,5,-3,4,-4,-3,-5,9,-1,-2,-4,-1,-6]);
```

$$KB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & -3 & -5 & 9 \\ -1 & -2 & -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> KB1 := addrow(KB,1,2,3):
> KB2:= addrow(KB1,1,3,-4);
```

$$KB2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -18 \\ 0 & -12 & 9 & 11 & 29 \\ -1 & -2 & -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> KB3 := addrow(KB2,1,4,1):
> KB4 := addrow(KB3,2,1,-1/2);
```

$$KB4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -18 \\ 0 & -12 & 9 & 11 & 29 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> KB5 := addrow(KB4,2,3,3):
> KB6 := mulrow(KB5,2,1/4);
```

$$KB6 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-7}{4} & \frac{-9}{2} \\ 0 & 0 & -15 & -10 & -25 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> KB7 := mulrow(KB6,3,-1/15):
> KB8 := addrow(KB7,3,2,2);
```

$$KB8 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> KB9 := addrow(KB8,3,1,-1):
> KB10 := addrow(KB9,3,4,7);
```

$$KB10 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
> KB11 := mulrow(KB10,4,-3):
> KB12 := addrow(KB11,4,3,-2/3);
```

$$KB12 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> KB13 := addrow(KB12,4,2,5/12):
> KB14 := addrow(KB13,4,1,7/6);
```

$$KB14 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Der Vektor v_2 lässt sich also wie folgt darstellen

$$v_2 = 0b_1 + (-2)b_2 + 3b_3 + (-2)b_4.$$

Wir haben gezeigt, dass sich die Vektoren v_1 und v_2 mit reellen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$ wie folgt darstellen lassen:

$$v_1 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \text{ und } v_2 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4.$$

Mit mehrmalige Anwendung des Austauschlemmas erhalten wir dann die folgenden Basen:

a) $B_1 = \{v_1, b_2, b_3, b_4\}$

b) $B_2 = \{b_1, v_1, b_3, b_4\}$

c) $B_3 = \{b_1, v_2, b_3, b_4\}$

d) $B_4 = \{b_1, b_2, v_2, b_4\}$

e) $B_5 = \{b_1, b_2, b_3, v_2\}$

Wir müssen nun in Fällen a) und b) entscheiden, welche Vektoren sich mit v_2 austauschen lassen. In den Fällen c)-e) müssen wir den Vektor v_1 in den jeweiligen Basen darstellen.

a) *Wegen $v_2 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0v_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$ enstehen die folgenden möglich Basen*

   - $B_{11} = \{v_1, v_2, b_3, b_4\}$
   - $B_{12} = \{v_1, b_2, v_2, b_4\}$
   - $B_{13} = \{v_1, b_2, b_3, v_2\}$

b) *Aus der Beziehung $v_1 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$ bekommen wir $b_2 = \frac{1}{\mu_2}(v_1 - \mu_1 b_1)$ und dann $v_2 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = \lambda_2(\frac{1}{\mu_2}(v_1 - \mu_1 b_1)) + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$ bzw. $v_2 = (-\frac{\lambda_2 \mu_1}{\mu_2})b_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2} v_1 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$. Durch Austauschen erhalten wir dann die Basen:*

   - $B_{21} = \{v_2, v_1, b_3, b_4\}$
   - $B_{22} = \{b_1, v_1, v_2, b_4\}$
   - $B_{23} = \{b_1, v_1, b_3, v_2\}$

c) *Aus der Beziehung $v_2 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$ ergibt sich $b_2 = \frac{1}{\lambda_2}(v_2 - \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_4)$ und dann $v_1 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = \mu_1 b_1 + \mu_2(\frac{1}{\lambda_2}(v_2 - \lambda_3 b_3 - \lambda_4 b_4))$ bzw. $v_1 = \mu_1 b_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} v_2 + (-\frac{\mu_2 \lambda_3}{\lambda_2})b_3 + (-\frac{\mu_2 \lambda_4}{\lambda_2})b_4$. Durch Austauschen erhalten wir die Basen:*

   - $B_{31} = \{v_1, v_2, b_3, b_4\}$
   - $B_{32} = \{b_1, v_2, v_1, b_4\}$
   - $B_{33} = \{b_1, v_2, b_3, v_1\}$

d) *Aus der Gleichung* $v_1 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = v_1 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + 0v_2 + 0b_4$ *erhalten wir durch Austauschen die folgenden Basen:*

- $B_{41} = \{v_1, b_2, v_2, b_4\}$
- $B_{42} = \{b_1, v_1, v_2, b_4\}$

e) *Analog zu d) ergeben sich mittels Austauschen die Basen*

- $B_{51} = \{v_1, b_2, b_3, v_2\}$
- $B_{52} = \{b_1, v_1, b_3, v_2\}$

Insgesamt bekommen wir die folgenden Basen:

(1) $C_1 = \{v_1, v_2, b_3, b_4\}$

(2) $C_2 = \{v_1, b_2, v_2, b_3\}$

(3) $C_3 = \{v_1, b_2, b_3, v_2\}$

(4) $C_4 = \{b_1, v_1, v_2, b_4\}$

(5) $C_5 = \{b_1, v_1, b_3, v_2\}$

Anmerkung: Das kursiv Gedruckte zeigt uns, dass wir hier sämtliche Basen mit den Vektoren v_1 und v_2 schon angeben können, sobald wir die Darstellung von v_1 und v_2 bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 kennen.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V mit den Basen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ bzw. $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

a) Zeigen Sie: Die Vektoren $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ bilden genau dann eine Basis von $U_1 + U_2$, falls $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Unterräume $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 + U_2$.

Lösung:

a) $\Rightarrow$: Sei $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ eine Basis von $U_1 + U_2$ und $x \in U_1 \cap U_2$. Wir können sowohl $x = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m$ als auch $x = \beta_1 d_1 + \cdots + \beta_n d_n$ mit Körperelementen α_i und β_j schreiben. Hieraus erhalten wir $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m - (\beta_1 d_1 + \cdots + \beta_n c_n) = 0$. Die lineare Unabhängigkeit der Vekoren $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ liefert uns dann $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Damit gilt dann aber $x = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m = 0c_1 + \cdots + 0c_m = 0$.

Wir wissen also nun $U_1 \cap U_2 \subseteq \{0\}$. Aufgrund der Unterraumeigenschaft von $U_1 \cap U_2$ gilt dann schließlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$\Leftarrow$: Es gelte nun $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Nach der Definition der Summe von Vektorräumen ist klar, dass die Vektoren $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ bilden. Zu überprüfen bleibt daher noch die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren. Wir betrachten dazu

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_i d_i = 0$$

mit $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$. Betrachten wir das Element $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i = \sum_{j=1}^{n} (-\mu_i) d_i$, so sehen wir, dass x ein Element von $U_1 \cap U_2$ ist. Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ können wir dann $x = 0$ folgern. Mittels der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $c_1, c_2, \ldots, c_m$ bzw. $d_1, d_2, \ldots, d_n$ lässt sich dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ bzw. $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$ schließen. Lassen wir die Argumente Revue passieren, so haben wir die linearen Unabhängigkeit der Vektoren $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ gezeigt. Diese bilden somit eine Basis von $U_1 + U_2$.

Anmerkung: Die Aussage kann auch mit der Dimensionsformel (Satz 3.12)

$$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$$

bewiesen werden. Die Dimension des Nullraumes ist Null.

b) Klar ist, dass $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = U_1 + U_2$ ist. Zu überprüfen bleibt, wieviel Vektoren linear unabhängig sind. Dieses ergibt sich aus den folgenden Rechnungen:

```
> A := matrix(4,3,[3,1,1,-2,10,-1,1,-5,-2,-3,15,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 10 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

```
> A1 := swaprow(A,3,1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -2 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A2 := addrow(A1,1,2,2);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A3 := addrow(A2,1,3,-3);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 7 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A4 := addrow(A3,1,4,3);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A5 := mulrow(A4,3,1/16);
```

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A6 := addrow(A5,3,1,5);
```

$$A6 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A7 := mulrow(A6,4,-1/6);
```

$$A7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alle drei Spalten der Matrix sind also linear unabhängig.

Damit bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U_1 + U_2$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Seien U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines Vektorraumes V mit $U_1 \subseteq U_3$. Zeigen Sie, dass dann

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3) \tag{1}$$

gilt. Ist die Voraussetzung $U_1 \subseteq U_3$ für die Gültigkeit der Formel (1) auch notwendig?

Lösung:

- $\subseteq$: Sei $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$. Dann gilt $x \in U_1 + U_2$ und $x \in U_3$. Wir können also

  $$x = u_1 + u_2$$

  mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ schreiben. Wegen $U_1 \subseteq U_3$ gilt auch $u_1 \in U_3$ und dann

  $$u_2 = x - u_1 \in U_3.$$

  Weil nun $u_2 \in U_2$ gilt, bekommen wir

  $$u_2 = x - u_1 \in U_2 \cap U_3.$$

  Dieses liefert dann $x = u_1 + u_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

- $\supseteq$: Nun sei $x \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Dann ist $x = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2 \cap U_3$. Wegen $U_2 \cap U_3 \subseteq U_2$ gilt dann auch

  $$x \in U_1 + U_2.$$

  Wegen $U_1 \subseteq U_3$ erhalten wir

  $$u_1 \in U_3$$

  und dann aufgrund von $u_2 \in U_2 \cap U_3 \subseteq U_3$ auch

  $$x = u_1 + u_2 \in U_3.$$

  Wir haben also ingesamt $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$ gezeigt.

Es gelte die Formel (1) und es sei $x \in U_1$. Aufgrund von $U_1 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3)$ befindet sich das Element x also auch in dem Unterraum $U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Die Gleichheit der Formel liefert uns dann $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_3$. Damit ist also $U_1 \subseteq U_3$ gezeigt. Die Bedingung ist also notwendig.