Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 8. Dezember 2003
Abgabe bis 16. Dezember 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 9

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

a) Weisen Sie nach, dass die 2×2-Matrizen bezüglich der folgenden Addition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

und skalaren Multiplikation

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ bilden.

b) Geben Sie eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ an.

Lösung:

a) Es wird die Gültgkeit der Axiome für Vektorräume nachgewiesen.

(A 1) *Kommutativität*

Für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(A 2) *Assoziativität*

Für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

(A 3) *neutrales Element*

Für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Mittels des Axioms (A 1) folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ das neutrale Element bezüglich der Addition ist.

(A 4) *inverses Element*

Zu jeder Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gibt es eine Matrix $B = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mittels des Axioms (A 1) folgt, dass B das additive Inverse zu A ist.

(M 1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \alpha(a_{12}+b_{12}) \\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \alpha(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12} \\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(M 2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{12} \\ (\alpha+\beta)a_{21} & (\alpha+\beta)a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \alpha a_{12}+\beta a_{12} \\ \alpha a_{21}+\beta a_{21} & \alpha a_{22}+\beta a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(M 3) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & (\alpha\beta)a_{12} \\ (\alpha\beta)a_{21} & (\alpha\beta)a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

(M 4) Für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{R}} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{R}}a_{11} & 1_{\mathbb{R}}a_{12} \\ 1_{\mathbb{R}}a_{21} & 1_{\mathbb{R}}a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Wir betrachten die Menge

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Für eine beliebige Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ aus $M_2(\mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist B ein **Erzeugendensystem** von $M_2(\mathbb{R})$. Ferner erhalten wir durch Einsetzen der Nullmatrix, dass B eine **linear unabhängige Teilmenge** von $M_2(\mathbb{R})$ ist.
B ist daher eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $M_2(\mathbb{R})$.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren. Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Beweisen Sie, dass das System der Vektoren $v_1 - w, \dots, v_n - w$ genau dann linear abhängig ist, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ gilt.

Lösung:

$\Rightarrow$: Sei das System der Vektoren $v_1 - w, \dots, v_n - w$ linear abhängig, dann gibt es

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$$

mit

$$\lambda_1(v_1 - w) + \lambda_2(v_2 - w) + \cdots + \lambda_n(v_n - w) = 0.$$

Die Definition von w liefert uns die Gleichung

$$\lambda_1(v_1-(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n))+\lambda_2(v_2-(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n))+\cdots+\lambda_n(v_n-(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n)) = 0.$$

Fassen wir die Koeffizienten zusammen so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{array}{rl} & (\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_1)v_1 \\ + & (\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_2)v_2 \\ + & \cdots \\ + & (\lambda_n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_n)v_n \\ = & 0 \end{array}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{c} \lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_1 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\alpha_1 \\ \lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\alpha_n = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\alpha_n \end{array}$$

Die Annahme $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ führt dazu, dass $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ gilt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur linearen Abhängigkeit der Vektoren $v_1 - w, \ldots, v_n - w$.
Es muss also $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ gelten. Das Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert uns dann $\sum_{i=1}^n \lambda_i = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\sum_{i=1}^n \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)$ und nach Kürzen erhalten wir $1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

$\Leftarrow$: Es gelte $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Aus der Definition von w leiten wir die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - w = 0$$

ab. Setzen wir die Beschreibung der 1 ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)w = 0.$$

Durch Umformen sehen wir ferner

$$\alpha_1(v_1 - w) + \alpha_2(v_2 - w) + \cdots + \alpha_n(v_n - w) = 0.$$

Die Annahme, dass alle Koeffizienten α_i für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gleich Null sind, führt zu der widersprüchlichen Gleichung $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Es sind also nicht alle Koeffizienten gleich Null und somit die Vektoren $v_1 - w, \ldots, v_n - w$ linear abhängig.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^4$, nämlich

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\} \text{ und } W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0, x_2 = 2x_3 \right\}$$

Bestimmen Sie eine Basis für $V \cap W$.

Lösung: Wir bestimmen $V \cap W$. Jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \cap W$$

erfüllt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ &x_1 = 0 \\ &x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems (z.B. mittels Gauß-Algorithmus) liefert uns:

$$V \cap W = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt $V \cap W$ und ist linear unabhängig (klar!). Daher ist

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

eine Basis für $V \cap W$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**

a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des Vektorraumes V_1. Wir betrachten für ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ den Unterraum $U = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ von V_1. Beweisen Sie, dass es einen Unterraum W von V_1 gibt, so dass
$$U \cap W = \{0\} \text{ und } U + W = V_1 \text{ gilt.}$$

b) Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraumes V_2. Weisen Sie nach, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V_2 ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Lösung:

a) 1. Wir setzen $W = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$. Sei nun $x \in U \cap W$ beliebig, dann lässt sich x sowohl als
$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$$

(da $x \in U$ gilt) als auch als

$$x = \beta_{r+1}v_{r+1} + \beta_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \beta_n v_n$$

(da $x \in W$ gilt) schreiben, wobei α_i und β_j reelle Zahlen sind. Durch Subtrahieren der der zweiten Gleichung von der ersten erhalten wir die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r + (-\beta_{r+1})v_{r+1} + (-\beta_{r+2})v_{r+2} + \cdots + (-\beta_n)v_n = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$$

und hieraus wiederum $x = 0$. Somit gilt $U \cap W \subseteq \{0\}$.
Aus $0 \in U$ und $0 \in W$ (U und W sind Unterräume von V_1) folgt $0 \in U \cap W$, also $\{0\} \subseteq U \cap W$. Insgesamt haben wir somit $U \cap W = \{0\}$ gezeigt.

2. Sei nun $v \in V_1$ beliebig, dann lässt sich

$$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$$

mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir teilen die Summe wie folgt auf

$$v = \underbrace{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_r v_r}_{\in U} + \underbrace{\gamma_{r+1} v_{r+1} + \cdots \gamma_n v_n}_{\in W}$$

und sehen, dass $v \in U + W$, also $V_1 \subseteq U + W$, gilt.
Da die Summe von Unterräumen wieder ein Unterraum ist, folgt, dass $U + W$ wieder ein Unterraum von V_1 ist. Somit gilt auch $U + W \subseteq V_1$ - insgesamt haben wir also $V_1 = U + W$ gezeigt.

b) $\Rightarrow$: Sei $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V_2. Angenommen es gelte $U_1 \not\subset U_2$ und $U_2 \not\subset U_1$. Dann gibt es ein $x \in U_1$ mit $x \notin U_2$ und ein $y \in U_2$ mit $y \notin U_1$. Die Elemente x und y befinden sich wegen $U_1 \subseteq (U_1 \cup U_2)$ und $U_2 \subseteq (U_1 \cup U_2)$ auch in $U_1 \cup U_2$. Aus der Unterraumeigenschaft von $U_1 \cup U_2$ folgt dann $x + y \in U_1 \cup U_2$, d.h. es gilt $x + y \in U_1$ oder $x + y \in U_2$.
Angenommen es gelte $x + y \in U_1$. Aufgrund der Unterraumeigenschaften folgt dann $-x = (-1)x \in U_1$ (da $x \in U_1$) und ferner $y = (x + y) + (-x) \in U_1$ (Widerspruch, da $y \notin U_1$).
Analog führt die Annahme $x + y \in U_2$ zu einem Widerspruch.
Somit gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

$\Leftarrow$: Falls $U_1 \subseteq U_2$ gilt, so folgt $(U_1 \cup U_2) = U_2$. U_2 ist ein Unterraum von V_2 und somit auch $U_1 \cup U_2$.
Falls $U_2 \subseteq U_1$ gilt, so ist $U_1 \cup U_2 = U_1$ und U_1 ist ein Unterraum von V_2.