Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 8. Dezember 2003
Abgabe bis 9. Dezember 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 8

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Seien $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass das System der folgenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass eine reelle Polynomfunktion $f \neq 0$ vom Grad kleiner gleich n höchstens n Nullstellen hat.

Lösung: Wir betrachten die folgende Linearkombination über den reellen Zahlen

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Blicken wir auf die einzelnen Komponenten, so lässt sich erkennen, dass $a_0, \ldots, a_n$ Nullstellen der reellen Polynomfunktion f mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$$

sind. Aufgrund der vorausgesetzen paarweisen Verschiedenheit von $a_1, \ldots, a_n$ folgt weiterhin, dass es n Nullstellen von f gibt.
Nun gilt $f = 0$ (Nullabbildung), denn angenommen es gelte $f \neq 0$, so hätte f nach dem obigen Hinweis höchstens $n - 1$ Nullstellen. Dieses ist ein Widerspruch dazu, dass wir schon n Nullstellen von f gefunden haben.
Aus der Tatsache, dass $f = 0$ gilt, erhalten wir dann, dass auch alle Koeffizienten α_i von f gleich 0 sind (dies wird nachstehend mit Induktion nach n gezeigt). Insgesamt ist also die lineare Unabhängigkeit der obigen Vektoren bewiesen.

Beh: Ist $n \geq 1$ und gilt $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so folgt $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$.

Beweis: Induktion nach n

IA($n = 1$): Es gelte $\alpha_0 \cdot 1 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$ folgt dann $\alpha_0 = 0$.

IV: Die obige Behauptung gilt für $n \geq 1$.

IS($n \to n+1$) Es gelte $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von $x = 0$ bekommen wir $\alpha_0 = 0$. Wir können also die Summe auf $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reduzieren. Klammern wir ein x aus, so erhalten wir, dass $x \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Gleichung ist dann inbesondere für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}$ gültig. Aufgrund der Körpereigenschaft von $\mathbb{R}$ muss dann $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} = 0$ gelten. Mit der Induktionsvorraussetzung (diese kann wirklich angewendet werden) folgt

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Zahl $\sqrt{p}$ ist nicht rational.

b) Die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet einen Körper.

Sie dürfen verwenden: Falls p ein Produkt teilt, so teilt p auch mindestens einen Faktor.

Lösung:

a) Angenommen $\sqrt{p}$ ist eine rationale Zahl, dann lässt sie sich mit teilerfremden ganzzahligen Zähler m und Nenner $n \neq 0$ darstellen, also $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Durch Quadrieren erhalten wir die Gleichung $p = \frac{m^2}{n^2}$ bzw $p \cdot n^2 = m^2$. Hier erkennen wir, dass p ein Teiler des Zählers m^2 ist. Nach dem Hinweis teilt p dann auch m. Wir können also $m = k \cdot p$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ schreiben. Nun lässt uns das Einsetzen dieser Gleichheit in die Gleichung $n^2 \cdot p = m^2$ erkennen, dass $n^2 \cdot p = k^2 \cdot p^2$ bzw. $n^2 = k^2 \cdot p$ gilt. Die Primzahl p ist also auch ein Teiler von n. Dieses ist aber ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n. Die Zahl $\sqrt{p}$ ist also keine rationale Zahl.

b) Die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ist also nach Teil a) eine Teilmenge der reellen Zahlen. Als Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ wählen wir die übliche Addition und Multiplikation von reellen Zahlen. Ist die Wohldefiniertheit dieser zwei Verknüpfungen gezeigt, so übertragen sich die Körperaxiome $(A1), (A2), (M1), (M2)$ und (D) auf $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Zu überprüfen bleibt ferner, ob $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein neutrales und inverses Element hat.

   b0) Seien $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Dann gibt es $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x = a_1 + b_1\sqrt{p}$ und $y = a_2 + b_2\sqrt{p}$. Wir bilden nun die Summe in den reellen Zahlen und erhalten $x + y = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p})$. Nach den Körperaxiomen von $\mathbb{R}$ lässt sich die Summe von x und y zu $x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p}$ umschreiben. Weil noch ausserdem die Summe von rationalen Zahlen wieder rational ist, so liegt $x + y$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Eine analoge Argumentation liefert uns $x \cdot y \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Wie oben schon angemerkt, gelten also in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ die Körperaxiome $(A1), (A2), (M1), (M2)$ und (D).

b1) Leicht zu erkennen ist, dass $0_{\mathbb{R}}$ und $1_{\mathbb{R}}$ Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ sind. Wir setzen einmal $a = b = 0$ und im anderen Fall $a = 1$ und $b = 0$. Ferner haben wir für ein $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ mit $x = a + b\sqrt{p}$: $x \cdot 1_{\mathbb{R}} = (a + b\sqrt{p}) \cdot (1 + 0\sqrt{p}) = (a + b\sqrt{p})$ und $x + 0_{\mathbb{R}} = (a + b\sqrt{p}) + (0 + 0\sqrt{p}) = (a + b\sqrt{p})$. Die Elemente $0_{\mathbb{R}}$ und $1_{\mathbb{R}}$ sind also neutrale Elemente der Verknüpfung $+_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}$ bzw. $\cdot_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}$.

b2) Betrachten wir zu einen gegebenen $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ mit der Darstellung $x = a + b\sqrt{p}$ das Element $y = (-a) + (-b)\sqrt{p}$, so gilt: $x + y = (a + b\sqrt{p}) + ((-a) + (-b)\sqrt{p}) = 0 + 0\sqrt{p} = 0_{\mathbb{R}}$. Das additive Inverse zu x ist also y.

b3) Sei nun $0 \neq x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{R}$. Dann existiert das multiplikative Inverses $\frac{1}{x}$ in $\mathbb{R}$. Weil sich nun x als $a + b\sqrt{p}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ausdrücken lässt, hat das in $\mathbb{R}$ gebildete Inverse die Gestalt $\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{p}} \overset{Erweitern}{=} \frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-b^2p}$ bzw. $\frac{1}{x} = \frac{a}{a^2-b^2p} + \frac{-b}{a^2-b^2p}\sqrt{p}$. Gilt nun $a^2 - b^2p \neq 0$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$, so ist gezeigt, dass das multiplikative Inverse von $x \neq 0$ immer gebildet werden kann und wiederum ein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ist.
Angenommen es gelte $a^2 - b^2p = 0$, so folgt daraus die Gleichung $a^2 = b^2p$. Für $b = 0$ erhalten wir zunächst $a = 0$ und dann $x = 0 + 0 \cdot \sqrt{p} = 0$. Aus der Forderung $0 \neq x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ kann also $b \neq 0$ und weiterhin die Gleichung $p = \frac{a^2}{b^2}$ bzw. $\sqrt{p} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gefolgert werden. Dieses ist aber ein Widerspruch zum Teil a) der Aufgabe. In $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ besitzt somit jedes von Null verschiedene Element ein multiplikatives Inverses.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten die Menge $\mathbb{F}_3 := \{0, 1, 2\}$ und versehen diese wie folgt mit einer Addition und einer Multiplikation

$$+_3 : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3, (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y & \text{für } 0 \leq x + y < 3 \\ x + y - 3 & \text{für } x + y \geq 3 \end{cases}$$

$$\cdot_3 : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3, (x, y) \mapsto \begin{cases} x \cdot y & \text{für } x \neq 2 \,\text{oder}\, y \neq 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_3, +_3)$ den Axiomen (A1)-(A4) genügt.

b) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_3, \cdot_3)$ die Forderungen (M1)-(M4) erfüllt.

Lösung:

a) Wir überprüfen die Gültigkeit der Axiome (A1)-(A4) von $+_3$:

(A1) Seien $x, y \in \mathbb{F}_3$. Für $0 \leq x+y < 3$ erhalten wir $x +_3 y = x + y \overset{KG\,in\,\mathbb{Z}}{=} y + x = y +_3 x$. Im anderen Fall ergibt sich $x +_3 y = x + y - 3 = y + x - 3 = y +_3 x$. Die Forderung (A1) ist also gültig. Hier hätten wir auch eine Tabelle von $+_3$ aufstellen und anhand dieser das Gesetz zeigen können.

(A2) Seien $x, y, z \in \mathbb{F}_3$. Wir betrachten

$$(x +_3 y) +_3 z \quad = \quad \begin{cases} (x+y) +_3 z & \text{für } 0 \le x+y < 3 \\ (x+y-3) +_3 z & \text{für } x+y \ge 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z & \text{für } 0 \le x+y+z < 3 \text{ und } 0 \le x+y < 3 \\ x+y+z-3 & \text{für } x+y+z \ge 3 \text{ und } 0 \le x+y < 3 \\ x+y-3+z & \text{für } 0 \le x+y-3+z < 3 \text{ und } x+y \ge 3 \\ x+y-3+z-3 & \text{für } x+y-3+z \ge 3 \text{ und } x+y \ge 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z & \text{für } 0 \le x+y+z < 3 \\ x+y+z-3 & \text{für } 3 \le x+y+z < 6 \\ x+y+z-6 & \text{für } x+y+z \ge 6 \end{cases}$$

und

$$x +_3 (y +_3 z) \quad = \quad \begin{cases} x +_3 (y+z) & \text{für } 0 \le y+z < 3 \\ x +_3 (y+z-3) & \text{für } y+z \ge 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z & \text{für } 0 \le x+y+z < 3 \text{ und } 0 \le y+z < 3 \\ x+y+z-3 & \text{für } x+y+z \ge 3 \text{ und } 0 \le y+z < 3 \\ x+y+z-3 & \text{für } 0 \le x+y-3+z < 3 \text{ und } y+z \ge 3 \\ x+y+z-3-3 & \text{für } x+y+z-3 \ge 3 \text{ und } y+z \ge 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z & \text{für } 0 \le x+y+z < 3 \\ x+y+z-3 & \text{für } 3 \le x+y+z < 6 \\ x+y+z-6 & \text{für } x+y+z \ge 6 \end{cases}$$

Damit gilt also das Assoziativgesetz.

(A3) Das neutrale Element der Addition ist die Null. Denn es gilt $0 +_3 0 = 0 + 0 = 0$, $1 +_3 0 = 1 + 0 = 1$ und $2 +_3 0 = 2 + 0 = 2$.

(A4) Wegen $0 +_3 0 = 0$, $1 +_3 2 = 0$ und $2 +_3 1 = 0$ und der Gültigkeit von (A1) bgzl. $+_3$ gibt es zu jedem Element ein Inverses.

b) Wir überprüfen die Gültigkeit der Axiome (M1)-(M4) von $\cdot_3$:

(M1) Für $x = 2$ und $y = 2$ ergibt sich $x \cdot_3 y = 1 = y \cdot_3 x$. In den anderen Fällen bekommen wir $x \cdot_3 y = x \cdot y = y \cdot x = y \cdot_3 x$. Damit gilt das Kommutativgesetz.

(M2) Seien $x, y, z \in \mathbb{F}_3$. Zunächst nehmen wir $x = 0$ an. Betrachten wir $(x \cdot_3 y) \cdot_3 z$ so bekommen wir $(0 \cdot_3 y) \cdot_3 z = 0 \cdot_3 z = 0$. Zum anderen erhalten wir aus $x \cdot_3 (y \cdot_3 z) = 0 \cdot_3 (y \cdot_3 z)$ entweder die Gleichung $0 \cdot_3 (y \cdot z) = 0$ oder $0 \cdot_3 1 = 0$. Für $x = 0$ ist als das Assoziativgesetz gültig. Ebenso lässt sich das Assoziativgesetz für $y = 0$ oder

$z = 0$ nachweisen. Die restlichen Fälle decken wir durch die folgende Tafel ab.

x	y	z	$x \cdot_3 y$	$y \cdot_3 z$	$(x \cdot_3 y) \cdot_3 z$	$x \cdot_3 (y \cdot_3 z)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2
1	2	2	2	1	1	1
2	1	1	2	1	2	2
2	1	2	2	2	1	1
2	2	1	1	2	1	1
2	2	2	1	1	2	2

Damit gilt also das Assoziativgesetz bzgl. der Multiplikation.

(M3) Wegen $0 \cdot_3 1 = 0$, $1 \cdot_3 1 = 1$ und $1 \cdot_2 2 = 2$ ist 1 das neutrale Element der Multiplikation.

(M4) Wegen $1 \cdot_3 1 = 1$, $2 \cdot_3 2 = 1$ hat jedes von Null verschiedene Element ein Inverses bzgl. $\cdot_3$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**

a) Sei V_n die Menge aller Polynomfunktionen f mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ über den reellen Zahlen vom Grad kleiner gleich n. Zeigen Sie, dass V_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Zu gegebenen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3^2 = 0 \right\}.$$

Für welche a_1, a_2, a_3 bildet W bezüglich der koordinatenweisen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung:

a) Wir legen folgenden Verknüpfungen fest:

$$+_{V_n} : V_n \times V_n \longrightarrow V_n, (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

und

$$\cdot_{V_n} : \mathbb{R} \times V_n \longrightarrow V_n, (\lambda, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) x^i.$$

Mit diesen Verknüpfungen wird V_n zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum, wie nachfolgend gezeigt wird.

(A 1) Seien $f, g \in V_n$, dann sind sie durch $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ darstellbar. Die Summe von f und g an der Stelle x ausgewertet ist dann $\sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$. Diese lässt sich mittels des Kommutativgesetz der reellen Zahlen zu $\sum_{i=0}^n (b_i + a_i)x^i$ gleichwertig umformen. Diese ist dann aber gerade $(g + f)(x)$.

(A 2) Seien $f, g, h \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ und $h(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ und $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt aufgrund des Assoziativgesetzes in $\mathbb{R}$:

$$((f +_{V_n} g) +_{V_n} h)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i +_{V_n} \sum_{i=0}^n c_i x^i = \sum_{i=0}^n ((a_i + b_i) + c_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i + (b_i + c_i))x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i +_{V_n} \sum_{i=0}^n (b_i + c_i)x^i = (f +_{V_n} (g +_{V_n} h)(x)$$

(A 3) Mit der Festsetzung, dass der Grad der Nullabbildung $-\infty$ ist, erreichen wir, dass $f = 0$ ein Element von V_n ist und dann $(f +_{V_n} 0)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + 0)x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i = f(x)$ gilt. Mit der schon geltenen Kommutativität ist $f = 0$ dann das neutrale Element von $+_{V_n}$.

(A 4) Zu gegebenen Element $f \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ betrachten wir das Element g mit $g(x) = \sum_{i=0}^n (-a_i)x^i$. Es ergibt sich $(f +_{V_n} g)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + (-a_i))x^i = \sum_{i=0}^n 0_{\mathbb{R}} x^i = 0_{\mathbb{R}}$. Aus $f +_{V_n} g = 0$ und der Kommutativität folgt, dass g das additive Inverse zu f ist.

(M 1) Seien nun $a_i, b_i, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$. Dann gilt mit dem Distributivgesetz der reellen Zahlen:

$$(\lambda \cdot_{V_n} (f +_{V_n} g))(x) = \lambda \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot (a_i + b_i))x^i = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot a_i + \lambda \cdot b_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot a_i)x^i +_{V_n} \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot b_i)x^i = (\lambda \cdot_{V_n} f)(x) +_{V_n} (\lambda \cdot_{V_n} g)(x)$$

(M 2) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dann gilt wiederum nach dem Distributivgesetz der reellen Zahlen

$$((\lambda+\mu) \cdot_{V_n} f)(x) = \sum_{i=0}^n ((\lambda+\mu) \cdot a_i)x^i = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot a_i + \mu \cdot a_i)x^i = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot a_i) + \sum_{i=0}^n (\mu \cdot a_i)x^i$$

$$= (\lambda \cdot_{V_n} f)(x) +_{V_n} (\mu \cdot_{V_n} f)(x)$$

(M 3) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dann gilt nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation von reellen Zahlen

$$((\lambda \cdot \mu) \cdot_{V_n} f)(x) = \sum_{i=0}^n ((\lambda \cdot \mu) \cdot a_i)x^i = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot (\mu \cdot a_i))x^i = \lambda \cdot_{V_n} \sum_{i=0}^n (\mu \cdot a_i)x^i = (\lambda \cdot_{V_n} (\mu \cdot_{V_n} f)(x)$$

(M 4) Sei $f \in V_n$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dann gilt wegen $x \cdot 1_{\mathbb{R}} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auch das Folgende

$$(1_{\mathbb{R}} \cdot_{V_n} f)(x) = \sum_{i=0}^n (1_{\mathbb{R}} \cdot a_i)x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i = f(x).$$

b) Sei W ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann enthält er das Nullelement $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, welche die Gleichung $a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0$ dann erfüllt. Für $a_1 \neq 0$ liegt also nicht das Nullelement in W und somit ist W keine $\mathbb{R}$-Vektorraum. Damit verbleiben vier Fälle zu untersuchen:

1. $(a_1 = a_2 = a_3 = 0)$
   Hier gilt $W = \mathbb{R}^3$ und ist somit ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
2. $(a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = 0)$
   Hier gilt $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid a_2 x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Dieses ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$, denn W enthält die 0 und wir sehen leicht, dass aus $v, w \in W$ auch $v + w \in W$ und für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot v \in W$ folgt.
3. $(a_3 \neq 0, a_1 = a_2 = 0)$
   Es gilt dann $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid a_3 x_3^2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Dieses ist auch ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ wie leicht zu sehen ist.
4. $(a_1 = 0, a_2 \neq, a_3 \neq 0)$
   W ist hier die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid a_2 x_2 + a_3 x_3^2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{a_3}{a_2} x_3^2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.
   Wegen $(-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{a_3}{a_2} x_3^2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \frac{a_3}{a_2} x_3^2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \notin W$. Denn die zweite Komponente ist für Elemente aus W und $a_3 \cdot a_2 > 0$ immer negativ und für $a_3 \cdot a_2 < 0$ positiv. Die skalare Multiplikation nicht abgeschlossen und dahe liegt kein $\mathbb{R}$-Vektorraum vor.

In den Fällen $(a_1 = a_2 = a_3 = 0)$, $(a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = 0)$ und $(a_3 \neq 0, a_1 = a_2 = 0)$ bildet W bezüglich der koordinatenweisen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.