Musterlösung zu Blatt 6

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
>
>
```

Aufgabe 1 Teil a)

```
>
> A:=matrix(3,4,[6,3,-9,9,4,-1,-7,3,-1,-8,-1,-9]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -9 & 9 \\ 4 & -1 & -7 & 3 \\ -1 & -8 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix von A

```
> KA := matrix(3,5,[6,3,-9,9,1,4,-1,-7,3,-11,-1,-8,-1,-9,11]);
```

$$KA := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -9 & 9 & 1 \\ 4 & -1 & -7 & 3 & -11 \\ -1 & -8 & -1 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

Addition des -4/6-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile

```
> KA1 := addrow(KA,1,2,-4/6);
```

$$KA1 := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & \frac{-35}{3} \\ -1 & -8 & -1 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> KA2 := addrow(KA1,1,3,1/6);
```

$$KA2 := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & \frac{-35}{3} \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{67}{6} \end{bmatrix}$$

```
> KA3 := mulrow(KA2,1,1/6);
```

$$KA3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & -3 & -1 & -3 & \frac{-35}{3} \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{67}{6} \end{bmatrix}$$

```
> KA4 := mulrow(KA3,2,-1/3);
```

$$KA4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{35}{9} \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{67}{6} \end{bmatrix}$$

```
> KA5 := addrow(KA4,2,1,-1/2);
```

$$KA5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{35}{9} \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{67}{6} \end{bmatrix}$$

```
> KA5 := addrow(KA5,2,3,15/2);
```

$$KA5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{35}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{121}{3} \end{bmatrix}$$

Da die Gleichung, die zur letzten Zeile der Matrix KA5 gehört, unlösbar ist, so ist auch das Gleichungssystem unlösbar. Die Lösungsmenge ist also leer.
>

Aufgabe 1 Teil b)

```
>
> B := matrix(3,4,[1,2,-2,3,2,4,-3,4,5,10,-8,11]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & 10 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix von B

```
> KB := matrix(3,5,[1,2,-2,3,2,2,4,-3,4,5,5,10,-8,11,12]);
```

$$KB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

```
> KB1 := addrow(KB,1,2,-2);
```

$$KB1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

```
> KB2 := addrow(KB1,1,3,-5);
```

$$KB2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> KB3 := addrow(KB2,2,1,2);
```

$$KB3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> KB4 := addrow(KB3,2,3,-2);
```

$$KB4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>

Nun streichen wir zunächst die Nullzeile und fuegen anschließend eine Nullzeile so ein, dass sich die Einsen auf der Diagonale befinden. Diese beiden Aktionen können wir durch Tauschen der zweiten und dritten Zeile in KB4 erreichen.

>

```
> KB5 := swaprow(KB4,2,3);
```

$$KB5 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir fügen noch eine Nullzeile ein, damit KB5 die 4 Zeilen und 5 Spalten hat.

```
> KB6 := extend(KB5,1,0,0);
```

$$KB6 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun ersetzen wir alle 0 auf der Diagonalen durch -1.

```
> KB6[2,2]:=-1;
```

$$KB6_{2,\,2} := -1$$

```
> KB6[4,4]:=-1;
```

$$KB6_{4,\,4} := -1$$

```
> print(KB6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier kann direkt die Lösungsmenge abgelesen werden, nämlich:

```
>
> SpezielleLös:=vector(4,[4,0,1,0]);
```

$$SpezielleLös = [4, 0, 1, 0]$$

```
>
> Spalte2:=vector(4,[2,-1,0,0]);
```

$$Spalte2 := [2, -1, 0, 0]$$

```
>
> Spalte4:=vector(4,[-1,0,-2,-1]);
```

$$Spalte4 := [-1, 0, -2, -1]$$

```
>
```

Die Linearkombination der zweiten und vierten Spalte ist eine Lösung des homogenen Systems [B,0]. Unser inhomogenes Gleichungssystem hat dann die Lösung:

```
>
> w:=matadd(scalarmul(Spalte2,t1),scalarmul(Spalte4,t2));
```

$$w := [2\,t1 - t2, -t1, -2\,t2, -t2]$$

```
>
> Lös:=matadd(SpezielleLös,w);
```

$$Lös = [4 + 2\,t1 - t2, -t1, 1 - 2\,t2, -t2]$$

```
>
```

Die Parameter t1 und t2 sind aus den reellen Zahlen beliebig wählbar.

```
>
```

Aufgabe 2

```
>
> C:=matrix(3,3,[1,-1,3,3,-2,9,-2,-2,-6]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 9 \\ -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix von C

```
> KC:=matrix(3,4,[1,-1,3,a,3,-2,9,b,-2,-2,-6,c]);
```

$$KC := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & a \\ 3 & -2 & 9 & b \\ -2 & -2 & -6 & c \end{bmatrix}$$

```
> KC1 := addrow(KC,1,2,-3);
```

$$KC1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & -3\,a + b \\ -2 & -2 & -6 & c \end{bmatrix}$$

```
> KC2 := addrow(KC1,1,3,2);
```

$$KC2 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & -3\,a+b \\ 0 & -4 & 0 & 2\,a+c \end{bmatrix}$$

```
> KC3 := addrow(KC2,2,1,1);
```

$$KC3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2\,a+b \\ 0 & 1 & 0 & -3\,a+b \\ 0 & -4 & 0 & 2\,a+c \end{bmatrix}$$

```
> KC4 := addrow(KC3,2,3,4);
```

$$KC4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2\,a+b \\ 0 & 1 & 0 & -3\,a+b \\ 0 & 0 & 0 & -10\,a+4\,b+c \end{bmatrix}$$

```
>
```

Hier erkennen wir, dass nur für c=10a-4b das Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt. Für c <> 10a-4b hat das System keine Lösung. Wieviel Lösungen liegen vor, falls es lösbar ist? Aus der zweiten Zeile erkennen wir, dass y durch b-3a bestimmt ist. Die erste Zeile zeigt uns, dass x=a+y-3z bzw. x=a+(b-3a)-3z=2a+b-3z ist. Die Lösungsmenge ist also durch folgenden Vektor bestimmt.

```
>
> L:=[-2*a+b-3*t,b-3*a,t];
```

$$L := [-2\,a+b-3\,t, -3\,a+b, t]$$

```
>
```

Hier liegen also unendlich viele Lösungen vor! Das System hat damit keine oder unendlich viele Lösungen. Genau eine Lösung kann also nicht auftreten. Ein anderes Argument dafür ist, dass KC4 nicht den Rang drei - es gibt keine drei Stufenvektoren - hat.

```
>
>
```

<u>Aufgabe 3</u>

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem

```
> GS:=matrix(2,3,[-3,4,7,2,-5,-4]);
```

$$GS := \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix von GS

```
> KGS:=matrix(2,4,[-3,4,7,-3,2,-5,-4,2]);
```

$$KGS := \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> KGS1 := mulrow(KGS,1,-1/3);
```

$$KGS1 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-7}{3} & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> KGS2 := addrow(KGS1,1,2,-2);
```

$$KGS2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-7}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-7}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KGS3 := mulrow(KGS2,2,-3/7);
```

$$KGS3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-7}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> KGS4 := addrow(KGS3,2,1,4/3);
```

$$KGS4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-19}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

Ergänze mit einer Nullzeile, so dass die Einsen auf der Diagonale sind und die Matrix 3 Zeilen und 4 Spalten hat.

```
>
> KGS5 := extend(KGS4,1,0,0);
```

$$KGS5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-19}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Nullen auf der Diagonalen werden durch -1 ersetzt.

```
> KGS5[3,3]:=-1;
```

$$KGS5_{3,3} := -1$$

```
> print(KGS5);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-19}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier ist es wieder keine Schwierigkeit die Lösungsmenge abzulesen, die hier als Schnittgerade interpretiert wird. Ihr Parameterform ist

```
> G := t -> matrix(3,1,[1+19/7*t,2/7*t,t]);
```

$$G := t \to \mathrm{matrix}\left(3, 1, \left[1 + \frac{19}{7}t, \frac{2}{7}t, t\right]\right)$$

```
>
```

Aufgabe 4

```
>
> GS1 := matrix(3,3,[10,1,-2,1,2,2,4,4,3]);
```

$$GS1 := \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix von GS1

```
> KGS1 := matrix(3,4,[10,1,-2,2,1,2,2,3,4,4,3,5]);
```

$$KGS1 := \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

```
> KGS11 := swaprow(KGS1,1,2);
```

$$KGS11 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> KGS12 := addrow(KGS11,1,2,-10);
```

$$KGS12 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> KGS13 := addrow(KGS12,1,3,-4);
```

$$KGS13 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> KGS14 := mulrow(KGS13,2,-1/19);
```

$$KGS14 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{22}{19} & \frac{28}{19} \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> KGS15 := addrow(KGS14,2,1,-2);
```

$$KGS15 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{22}{19} & \frac{28}{19} \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> KGS16 := addrow(KGS15,2,3,4);
```

$$KGS16 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{22}{19} & \frac{28}{19} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{19} & \frac{-21}{19} \end{bmatrix}$$

```
> KGS17 := mulrow(KGS16,3,-19/7);
```

$$KGS17 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{22}{19} & \frac{28}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> KGS18 :=addrow(KGS17,3,2,-22/19);
```

$$KGS18 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-6}{19} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> KGS19 :=addrow(KGS18,3,1,6/19);
```

$$KGS19 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hier können wir direkt die Lösung x=1, y=-2, z=3 ablesen. Der Schnittpunkt der drei Ebenen ist also

```
> SE:=matrix(3,1,[1,-2,3]);
```

$$SE := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
>
```