Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 10. November 2003
Abgabe bis 18. November 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 5

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

Wir betrachten die Vektoren $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Vektoren $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dar.

Lösung: Um das Problem $\mathfrak{x} = r_1\mathfrak{a} + r_2\mathfrak{b} + r_3\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{y} = s_1\mathfrak{a} + s_2\mathfrak{b} + s_3\mathfrak{c}$ zu lösen, wollen wir die Cramer-Regel (Vorlesung Satz 9.4) anwenden. Dazu müssen wir zunächst das Spatprodukt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ berechnen und nachweisen, dass dieses nicht Null ist.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}) \overset{11.3\,(1.9)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} 5 - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} 6 + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} 3$$

$$= (-19) \cdot 5 - (-24 \cdot 6) + 6 = 55$$

Wir können also hier tatsächlich die Cramerregel anwenden.

Um die Koeffizienten r_1, r_2 und r_3 berechnen zu können, betrachten wir die Spatprodukte

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}) \text{ und } (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

Mittels der Regel 11.3 (1.9) erhalten wir die folgenden Ergebnisse

$$60, \ -40, \ \text{und } 35.$$

Nun lassen sich mittels (1.2) der Vorlesung die Koeffizienten bestimmen, nämlich $r_1 = \frac{60}{55} = \frac{12}{11}$, $r_2 = \frac{-40}{55} = \frac{-8}{11}$ und $r_3 = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$.

Die Skalare s_1, s_2 und s_3 ergeben sich, indem wir die Spatprodukte

$$(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}) \text{ und } (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

bestimmen. Die Regel 11.3 (1.9) liefert uns wiederum folgende Ergebnisse

$$80, \ -90, \ \text{und } 65.$$

Die Formeln in (1.2) der Vorlesung geben uns $s_1 = \frac{80}{55} = \frac{16}{11}$, $s_2 = \frac{-90}{55} = \frac{-18}{11}$ und $s_3 = \frac{65}{55} = \frac{13}{11}$.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten die Ebenen E_1, E_2 und E_3, welche durch die Gleichungen

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1 \rangle = -1,\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_2 \rangle = 4 \text{ und } \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3 \rangle = 2$$

festgelegt sind. Hierbei haben die Stützvektoren die folgenden Darstellungen

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{und } \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche, auf allen drei Ebenen liegenden Punkte.

Lösung: Ein Punkt $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, der auf allen drei Ebenen liegt, erfüllt die folgenden Gleichungen

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1 \rangle = -1,\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_2 \rangle = 4 \text{ und } \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_3 \rangle = 2.$$

Setzen wir für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_1$,$\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ die Koordinatendarstellungen ein, so bekommen wir die Gleichungen

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -1,\ \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4 \text{ und } \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2$$

bzw. nach Ausrechnen der Skalarprodukte

$$\begin{array}{rcr} 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 & = & -1 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Jetzt kann erkannt werden, dass wir obiges Gleichungssystem auch auf die folgende Art und Weise sehen können, nämlich:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Problem, welches in der ersten Aufgabe diesen Blattes gelöst worden ist.

Wir berechnen also das Spatprodukt $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ und erhalten

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \overset{11.3\,(1.9)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} 1$$

$$= 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 4 = 6.$$

Auch hier kann also die Cramer-Regel angewandt werden. Wir berechnen noch die drei weiteren Spatprodukte

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

. Mittels der Regel 11.3 (1.9) erhalten wir als Ergebnisse

$$2,\ 11 \text{ und } -10$$

Wir bekommen daher $x_1 = \frac{2}{6}, x_2 = \frac{11}{6}$ und $x_3 = -\frac{10}{6}$.

Auf allen drei Ebenen befindet sich also nur der Punkt $\mathfrak{x} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten zwei nicht parallele Geraden

$$G_1 : \mathfrak{x}(s) = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s \text{ und } G_2 : \mathfrak{y}(t) = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 t$$

mit reellen Zahlen s und t.

a) Zeigen Sie, dass es zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 gibt, so dass E_1 die Gerade G_1 und E_2 die Gerade G_2 enthält.

b) Bestimmen Sie den Abstand d dieser zwei Ebenen.

c) Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Lösung:

a) Wir betrachten die Ebene E_1 und E_2, welche durch $\langle \mathfrak{x}, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle = \langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_1\rangle$ bzw. $\langle \mathfrak{x}, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle = \langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_2\rangle$ beschrieben sind. Diese Ebenen sind offenbar parallel, da ihre Richtungsvektoren gleich sind. Wegen $\langle \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle = \langle \mathfrak{a}_1, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle + \langle \mathfrak{b}_1 s, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle = \langle \mathfrak{a}_1, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle$ liegt die Gerade G_1 in der Ebene E_1. Völlig analog lässt sich $\langle \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 t, \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}\rangle = \langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_2\rangle$ zeigen. Es sei an Eigenschaften des Skalarproduktes und an $\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2\rangle = 0$ erinnert.

b) Der Abstand d der Ebenen E_1 und E_2 lässt sich leicht bestimmen, da sie schon in Hesse-Normalform vorliegen. Dann gilt nämlich

$$d = |\langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_1\rangle - \langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_2\rangle| = |\langle \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}, \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2\rangle|$$

c) Der Abstand d der parallelen Ebenen E_1 und E_2, sagt uns auch, dass die Geraden G_1 und G_2 mindestens d Einheiten von einander einfernt sind. d kann also als Abstand der beiden Geraden G_1 und G_2 interpretiert werden. Der Abstand von Geraden lässt sich daher auf die Berechnung des Abstandes von (parallelen) Ebenen zurückführen.

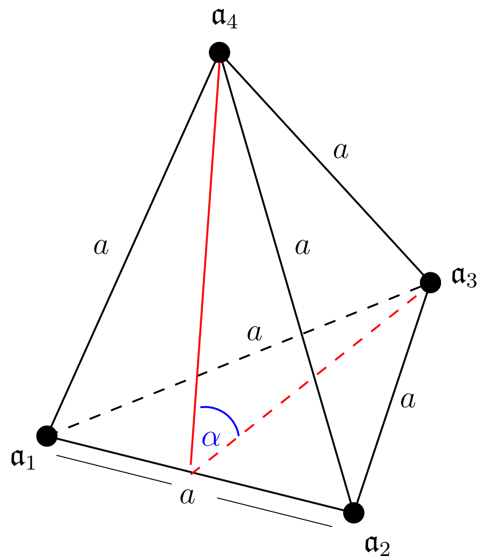

Abbildung 1: Das zu betrachtende Tetraeder

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten ein gleichseitiges Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ (siehe Abbildung 1).

a) Was ergibt das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle$?

b) Wie groß ist der Winkel α, der durch die Dreiecksflächen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ bestimmt ist?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle &\overset{plus\ \mathfrak{a}_1, minus\ \mathfrak{a}_1}{=} \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2) \rangle \\
&= \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 \rangle \\
&= \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle - \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Denn es ist $\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle = |\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1| \cdot |\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1)) = a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{3})$ und $\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \rangle = |\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1| \cdot |\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1)) = a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{3})$. Die Winkel der Dreiecksflächen sind alle $\frac{\pi}{3}$ gross, weil gleichseitige Dreiecke vorliegen.

Analog lässt sich $\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle = 0$ zeigen.

b) Wir betrachten dazu das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{a}_4 - \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}{2}, \mathfrak{a}_3 - \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}{2} \rangle$. Bringen wir die Argumente des Skalarproduktes auf einem Nenner, so bekommen wir

$$\langle \frac{2 \cdot \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2}{2}, \frac{2 \cdot \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2}{2} \rangle$$

bzw.

$$\langle \frac{(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2)}{2}, \frac{(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2)}{2} \rangle.$$

Nach den Gesetzen eines Skalarproduktes können wir dieses zu

$$\frac{1}{4}[\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle]$$

umformen. Nach Teil a) verschwinden der zweite und dritte Summand, so dass nur noch

$$\frac{1}{4}[\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle]$$

übrig bleibt. Diese Skalarprodukte können wir unter dem Wissen $\sphericalangle(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1) = \frac{\pi}{3} = \sphericalangle(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2)$ sowie der Gleichseitigkeit des Tetraeders ausrechnen, wir erhalten

$$\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 \rangle = a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) \text{und} \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \rangle = a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{3}).$$

Insgesamt bekommen wir wegen $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ die Gleichungskette

$$\langle \mathfrak{a}_4 - \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}{2}, \mathfrak{a}_3 - \frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}{2} \rangle = \frac{1}{4}(2 \cdot a^2 \cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{a^2}{4}.$$

Aus der Gleichseitigkeit ergibt sich, dass auch der Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4) = \frac{\pi}{3}$ ist. Dieses lässt uns

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{a}_4 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}|^2 &= \langle \mathfrak{a}_4 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}, \mathfrak{a}_4 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2} \rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2), (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2) \rangle \\
&= \tfrac{1}{4}[\langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1 \rangle + 2 \cdot \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2 \rangle + \langle \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2 \rangle] \\
&= \tfrac{1}{4}[a^2 + 2\langle (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4), (\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4) \rangle + a^2] \\
&= \tfrac{1}{4}[2 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4), (\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4)) \\
&= \tfrac{1}{4}[2 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{3}) \\
&= \tfrac{1}{4}[2 \cdot a^2 + 2a^2 \cdot \tfrac{1}{2}] \\
&= \tfrac{1}{4}[3 \cdot a^2] \\
&= \tfrac{3}{4}a^2
\end{aligned}$$

erkennen. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{a}_4 - \frac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}$ ist also $\sqrt{\frac{3}{4}}a$. Selbige Rechnungen können auch für die Seitenhalbierende $\mathfrak{a}_3 - \frac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}$ durchgeführt werden.

Nun sind wir in der Lage den Kosinus des Winkesl α zu berechnen, nämlich

$$\begin{aligned}
\tfrac{a^2}{4} &= \langle \mathfrak{a}_4 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}, \mathfrak{a}_3 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2} \rangle \\
&= |\mathfrak{a}_4 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}| \cdot |\mathfrak{a}_3 - \tfrac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}{2}| \cdot \cos(\alpha) \\
&= \sqrt{\tfrac{3}{4}}a \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}}a \cdot \cos(\alpha) \\
&= \tfrac{3}{4}a^2 \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Beziehung $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$. Mittels eines Rechners erhalten wir $\alpha \approx 70,53°$.