Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 03. November 2003
Abgabe bis 11. November 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 4

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{h}$.

b) Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{m}$.

c) Der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ des Dreiecks, der Mittelsenkrechtenschnittpunkt $\mathfrak{m}$ und der Höhenschnittpunkt $\mathfrak{h}$ liegen auf einer Geraden.

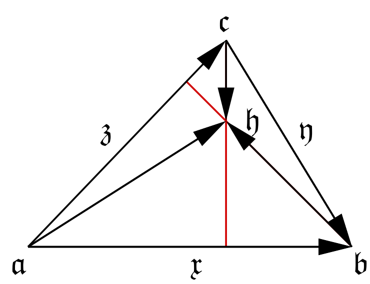
d) Der Schwerpunkt teilt die Strecke von $\mathfrak{h}$ nach $\mathfrak{m}$ im Verhältnis 2:1.

Lösung:

a) Wir wollen zwei verschiedene Möglichkeiten angeben, um die Aussage zu zeigen. In der ersten Variante wird die Aussage bewiesen, ohne den Höhenschnittpunkt explizit anzugeben. Der Beweis wird dadurch sehr übersichtlich und ist sehr kurz. In der zweiten Variante wird der Höhenschnittpunkt explizit ausgerechnet.

Erste Möglichkeit

Wir betrachten das folgende Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.



Da je zwei Höhenvektoren linear unabhängig sind, schneiden sich je zwei Höhen in einem Punkt. Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass sich die beiden Höhen, die senkrecht auf den Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ stehen, den gemeinsamen Schnittpunkt $\mathfrak{h}$ haben. Wenn wir zeigen können, dass $\mathfrak{h} - \mathfrak{a}$ senkrecht auf $\mathfrak{y}$ steht, dann wissen wir, dass sich alle Höhen in $\mathfrak{h}$ schneiden.
Nach Voraussetzung gelten also $\langle \mathfrak{h} - \mathfrak{c}, \mathfrak{x} \rangle = 0$ und $\langle \mathfrak{h} - \mathfrak{b}, \mathfrak{z} \rangle = 0$. Wir müssen zeigen, dass hieraus $\langle \mathfrak{h} - \mathfrak{a}, \mathfrak{y} \rangle = 0$ folgt. Dem Dreieck entnehmen wir die Beziehungen

$$\mathfrak{h} - \mathfrak{c} = -\mathfrak{z} + \mathfrak{h} - \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{h}-\mathfrak{b}=-\mathfrak{x}+\mathfrak{h}-\mathfrak{a}$$

und

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{x}-\mathfrak{z}.$$

Es folgt daher

$$0=\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{c},\mathfrak{x}\rangle=\langle-\mathfrak{z}+\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{x}\rangle=-\langle\mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle+\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{x}\rangle$$

sowie

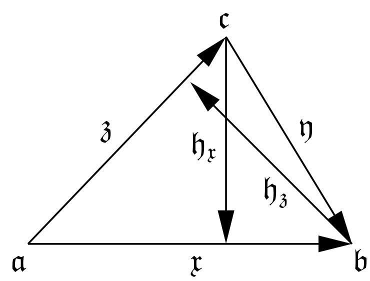
$$0=\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{b},\mathfrak{z}\rangle=\langle-\mathfrak{x}+\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{z}\rangle=-\langle\mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle+\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{z}\rangle.$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten Gleichung, so erhalten wir

$$0=\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\rangle=\langle\mathfrak{h}-\mathfrak{a},\mathfrak{y}\rangle$$

Zweite Möglichkeit

Wir setzen die Bezeichnungen so, wie sie in der folgenden Abbildung zu sehen sind.



Die Richtungsvektoren $\mathfrak{h}_\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{h}_\mathfrak{z}$ lassen sich wie folgt berechnen:

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{x}=\mathfrak{a}+r\mathfrak{x}-\mathfrak{c}=-\mathfrak{z}+r\mathfrak{x}$$

sowie

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{z}=\mathfrak{a}+s\mathfrak{z}-\mathfrak{b}=-\mathfrak{x}+s\mathfrak{z}$$

mit reellen Zahlen r und s. Der Richtungsvektor $\mathfrak{h}_\mathfrak{x}$ steht senkrecht zum Richtungsvektor $\mathfrak{x}$. Also muss $\langle\mathfrak{h}_\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle=0$ gelten. Aus

$$0=\langle\mathfrak{h}_\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle=\langle-\mathfrak{z}+r\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle=-\langle\mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle+r\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle$$

erhalten wir

$$r=\frac{\langle\mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle}{\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle}.$$

In entsprechender Weise folgt

$$s=\frac{\langle\mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle}{\langle\mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle}.$$

Wir möchten den gemeinsamen Schnittpunkt $\mathfrak{h}$ der beiden Höhen bestimmen. Dazu betrachten wir die beiden Geradengleichungen der beiden Höhen, welche durch

$$h_\mathfrak{x}(t_1)=\mathfrak{c}+t_1\mathfrak{h}_\mathfrak{x}$$

und

$$h_{\mathfrak{z}}(t_2) = \mathfrak{b} + t_2\mathfrak{h}_{\mathfrak{z}}$$

mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ beschrieben werden können. Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen erhalten wir t_1 bzw. t_2 und können mit diesen dann den gemeinsamen Schnittpunkt berechnen.

$$\begin{aligned} & h_{\mathfrak{x}}(t_1) = h_{\mathfrak{z}}(t_2) \\ \Leftrightarrow\quad & \mathfrak{c} + t_1(-\mathfrak{z} + r\mathfrak{x}) = \mathfrak{b} + t_2(-\mathfrak{x} + s\mathfrak{z}) \\ \Leftrightarrow\quad & \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - t_1(-\mathfrak{z} + r\mathfrak{x}) + t_2(-\mathfrak{x} + s\mathfrak{z}) = \mathfrak{o} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathfrak{x} - \mathfrak{z} + t_1\mathfrak{z} - t_1 r\mathfrak{x} - t_2\mathfrak{x} + t_2 s\mathfrak{z} = \mathfrak{o} \\ \Leftrightarrow\quad & (1 - t_2 - t_1 r)\mathfrak{x} + (-1 + t_1 + t_2 s)\mathfrak{z} = \mathfrak{o} \end{aligned}$$

Da die Richtungsvektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ linear unabhängig sind, können wir aus der letzten Gleichung folgern, dass

$$1 - t_2 - t_1 r = 0$$

und

$$-1 + t_1 + t_2 s = 0$$

gelten. Man erhält somit $t_1 = 1 - t_2 s$ und $t_2 = 1 - t_1 r$ und weiter durch gegenseitiges Einsetzen

$$t_2 = 1 - (1 - t_2 s)r = 1 - r + t_2 sr \Rightarrow t_2(1 - sr) = 1 - r \Rightarrow t_2 = \frac{1 - r}{1 - sr}$$

und dann

$$t_1 = 1 - t_2 s = 1 - \left(\frac{1 - r}{1 - sr}\right) s = \frac{1 - sr - s + rs}{1 - rs} = \frac{1 - s}{1 - rs}$$

Durch Einsetzen der bereits berechneten Werte von r und s in t_1 und t_2 erhält man

$$t_1 = \frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle}{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle^2}$$

und

$$t_2 = \frac{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle^2}.$$

Einsetzen von t_1 in $h_{\mathfrak{x}}(t_1)$ bzw. von t_2 in $h_{\mathfrak{z}}(t_2)$ führt zu

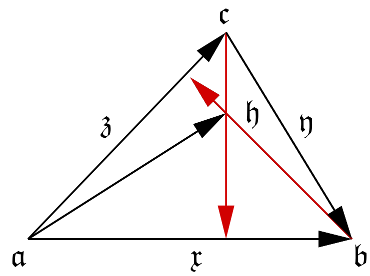
$$h_{\mathfrak{x}}(t_1) = \mathfrak{c} - \frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle}{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle^2}\mathfrak{z} + \frac{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle^2}{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle^2}\mathfrak{x}$$

und

$$h_{\mathfrak{z}}(t_2) = \mathfrak{b} - \frac{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{x} + \frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{z}.$$

Es gilt tatsächlich $h_{\mathfrak{x}}(t_1) = h_{\mathfrak{z}}(t_2)$ (man kann dies leicht verifizieren - verwende hierzu, dass $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} - \mathfrak{x} + \mathfrak{z}$ gilt). Somit ist $\mathfrak{h} = h_{\mathfrak{x}}(t_1) = h_{\mathfrak{z}}(t_2)$ der Schnittpunkt der beiden Höhen (wir können $\mathfrak{h}$ natürlich auch mittels der Eckpunkte des Dreiecks ausdrücken, indem wir die Beziehungen $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$ verwenden).

Wir müssen nun noch nachweisen, dass $\mathfrak{h}$ auch auf der dritten Höhe des Dreiecks liegt. Betrachte dazu die folgende Skizze:

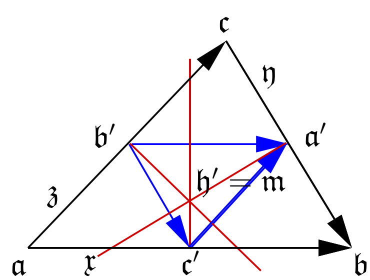


Die Höhengerade auf $\mathfrak{y}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{y}$ und und beinhaltet den Punkt $\mathfrak{a}$. Wenn wir zeigen können, dass $\langle \mathfrak{h} - \mathfrak{a}, \mathfrak{y} \rangle = 0$ gilt, dann wissen wir, dass auch die dritte Höhe unseren Punkt $\mathfrak{h}$ schneidet. Wir wollen dieses zeigen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathfrak{h} - \mathfrak{a}, \mathfrak{y} \rangle \\
= \; & \langle \mathfrak{b} - \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{x} + \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{z} - \mathfrak{a}, \mathfrak{y} \rangle \\
= \; & \langle \mathfrak{x} - \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{x} + \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{z}, \mathfrak{x} - \mathfrak{z} \rangle \\
= \; & \langle \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2 - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle + \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{x} + \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{z}, \mathfrak{x} - \mathfrak{z} \rangle \\
= \; & \langle \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{x} + \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\mathfrak{z}, \mathfrak{x} - \mathfrak{z} \rangle \\
= \; & \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \tfrac{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle + \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle - \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2}\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle \\
= \; & \tfrac{\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle - \langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2 - \langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle^2\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle + \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^3 + \langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle^2\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle^3 - \langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle + \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle}{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle\langle \mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle \mathfrak{z},\mathfrak{x}\rangle^2} \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich somit im gemeinsamen Punkt $\mathfrak{h}$.

b) Betrachte das folgende Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und den Seitenmittelpunkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$.



Nach a) wissen wir, dass sich die Höhen des Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ in einem Punkt $\mathfrak{h}'$ schneiden. $\mathfrak{h}'$ ist aber gerade auch der Schnittpunkt $\mathfrak{m}$ der Mittelsenkrechten des großen Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich somit in einem Punkt $\mathfrak{m}$.
$\mathfrak{m}$ kann man natürlich wieder explizit mittels $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ausdrücken. Dazu berechnet man den Höhenschnittpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ und ersetzt anschliessend $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ durch Ausdrücke, welche durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beschrieben werden.

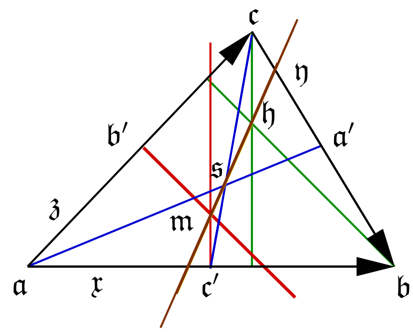
c)+d) Wir betrachten nocheinmal die Skizze aus Aufgabenteil b) und wollen zunächst zeigen, dass das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ ähnlich sind. Es gilt sicherlich

$$\mathfrak{a}' - \mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{z} + (\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}') = \mathfrak{x} + \frac{1}{2}(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}).$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}' = \frac{1}{2}\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}).$$

In entsprechender Weise erhält man $\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}' = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{b}' - \mathfrak{c}' = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$. Also sind die beiden Dreiecke ähnlich und ihre Seiten verhalten sich wie 2 : 1. Wir erinnern uns, dass



der Mittelsenkrechtenschnittpunkt $\mathfrak{m}$ gerade der Höhenschnittpunkt in dem kleinen Dreieck war. Da die Dreiecke im Verhältnis 2 : 1 ähnlich sind, gilt dann insbesondere auch

$$\mathfrak{h} - \mathfrak{c} = 2(\mathfrak{c}' - \mathfrak{m}).$$

Nun berechnen wir die Vektoren $\mathfrak{h} - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{s} - \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m} - \mathfrak{a}$. Diese sind

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} - \mathfrak{a} &= \mathfrak{z} + (\mathfrak{h} - \mathfrak{c}) \\
\mathfrak{s} - \mathfrak{a} &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{x} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}') = \tfrac{1}{2}\mathfrak{x} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{x} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{z} \\
\mathfrak{m} - \mathfrak{a} &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{x} + (\mathfrak{m} - \mathfrak{c}') = \tfrac{1}{2}\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{h} - \mathfrak{c}).
\end{aligned}$$

(Beachte: In $\mathfrak{s} - \mathfrak{a}$ kommt die Zahl $\frac{1}{3}$ daher, dass der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ die Seitenhalbierende $\mathfrak{c} - \mathfrak{c}'$ im Verhältnis 2 : 1 teilt). Wir setzen

$$\mathfrak{u} := \mathfrak{s} - \mathfrak{h}$$

und

$$\mathfrak{v} := \mathfrak{m} - \mathfrak{s}$$

und wollen $\mathfrak{u} = 2\mathfrak{v}$ zeigen. Denn wenn wir dies gezeigt haben, wissen wir, dass $\mathfrak{h}, \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{m}$ auf einer Geraden liegen und der Punkt $\mathfrak{s}$ die Strecke von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{h}$ im Verhältnis 2 : 1 teilt. Es gilt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{s} - \mathfrak{h} = (\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) - (\mathfrak{h} - \mathfrak{a}) = \frac{1}{3}\mathfrak{x} + \frac{1}{3}\mathfrak{z} - (\mathfrak{z} + (\mathfrak{h} - \mathfrak{c})) = \frac{1}{3}\mathfrak{x} - \frac{2}{3}\mathfrak{z} - (\mathfrak{h} - \mathfrak{c})$$

und damit folgt dann

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{m} - \mathfrak{s} = (\mathfrak{m} - \mathfrak{a}) - (\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}\mathfrak{x} - \frac{1}{2}(\mathfrak{h} - \mathfrak{c}) - (\frac{1}{3}\mathfrak{x} + \frac{1}{3}\mathfrak{z}) = \frac{1}{2}\mathfrak{u}$$

Damit haben wir c) und d) gezeigt. Die Gerade durch $\mathfrak{h}, \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{m}$ heißt **Eulersche Gerade**.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien die Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist.

b) Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ linear unabhängig ist.

c) Es gilt $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal sind.

Lösung:

a) Hier sind zwei Richtungen zu zeigen. Wir zeigen zunächst "$\Rightarrow$". Wir nehmen an, dass die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear abhängig sind, dies bedeutet nach Definition, dass ein $0 \neq r \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mathfrak{a} = r\mathfrak{b}$. Das Vektorprodukt lässt sich mittels dieser Kenntnis wie folgt umschreiben

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (r\mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} \overset{(V2)}{=} r(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}) = r\mathfrak{o} = \mathfrak{o}.$$

Glauben wir die Regel (V1), so erhalten wir schnell, dass $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist. Denn nach dieser Regel gilt $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = -\,\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$, was nur für den Nullvektor gelten kann.

Nun sehen wir den Richtung "$\Leftarrow$" ein. Wir nehmen also an, dass $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist. Betrachten wir die Beträge, so bekommen wir $0 = |\mathfrak{o}| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$. Nun sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide vom Nullvektor verschieden. Wir schließen daher, dass $\sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = 0$ ist. Es kommen also nur die Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ oder $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pi$ in Frage. Damit haben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die selbe oder entgegengesetzte Richtung. Es handelt sich also um parallele Vektoren. Damit gibt es ein $0 \neq r \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{a} = r\mathfrak{b}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind also linear abhängig.

b) Wir weisen zunächst die Richtung "$\Leftarrow$" nach. Sei also das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ linear unabhängig, wir können also aus der Gleichung $r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ mit reellen r, s und t die Gleichungen $r = 0$, $t = 0$, $s = 0$ folgern. Um die lineare Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu zeigen, müssen wir aus der Gleichung $r'\mathfrak{a} + s'\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ schliessen, dass $r' = s' = 0$ gilt. Wir nehmen uns die Gleichungen $r'\mathfrak{a} + s'\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ und $r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ her und erhalten die Beziehung

$$r'\mathfrak{a} + s'\mathfrak{b} = r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}),$$

welche sich äquivalent zu

$$(r - r')\mathfrak{a} + (s - s')\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$$

umformen lässt. Aufgrund der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ muss $r' = r$, $s' = s$ und $t = 0$ gelten. Ebenso wissen wir, dass $r = s = 0$ sein muss, so dass wir $r' = s' = 0$ erhalten. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind also linear unabhängig.

Wir zeigen noch "$\Rightarrow$". Seien die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear unabhängig. Wir müssen nachweisen, dass hieraus die lineare Unabhängigkeit des Systems $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ folgt. Dazu betrachten wir $r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ mit reellen r, s und t. Zu zeigen ist dann

$r = s = t = 0$. Wir wissen, dass $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ein Vektor ist, der auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht steht. Daher bilden wir $\langle r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}), \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\rangle$ und erhalten $r \cdot 0 + s \cdot 0 + t|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2 = 0$. Aus der Annahme $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = 0$ folgt nach Teil a) die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Dieses ist aber ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Es gilt daher $t = 0$. Aus der vorausgesetzen linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ergibt sich ferner $r = s = 0$. Wir haben also nun $r = s = t = 0$ gezeigt.

Nimmt man Satz 9.2 der Vorlesung zur Hilfe, so kann man b) auch wie folgt zeigen:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \text{ ist linear unabhängig} & \Leftrightarrow & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\rangle \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2 \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\sin(\sphericalangle\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq 0 \\
& \overset{\mathfrak{a}\neq 0,\, \mathfrak{b}\neq 0}{\Leftrightarrow} & \sin(\sphericalangle\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & \text{Die Vektoren } \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} \text{ sind nicht parallel.} \\
& \Leftrightarrow & \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} \text{ sind linear unabhängig.}
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl}
|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| & \Leftrightarrow & |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \\
& \Leftrightarrow & \sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = 1 \\
& \Leftrightarrow & \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2} \\
& \Leftrightarrow & \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = 0 \\
& \Leftrightarrow & |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow & \text{Die Vektoren } \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} \text{ sind orthogonal}
\end{array}$$

Wir erinnern daran, dass wir nur Winkel zwischen 0 und π betrachten.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Betrachten Sie das von den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aufgespannte Spat (siehe Abbildung 1).

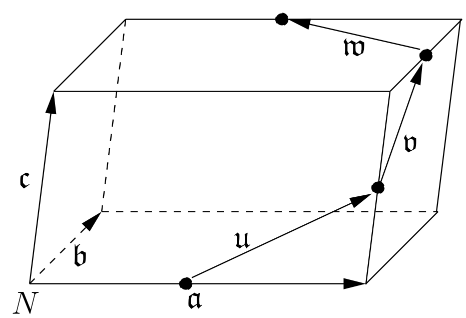


Abbildung 1: Das aufgespannte Spat mit den Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, welche die markierten Seitenmitten verbinden, in einer Ebene liegen. Betrachten Sie dazu $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$.

Lösung: Wir stellen erst $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ mittels $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dar. Wir erhalten:

- $\mathfrak{u} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$
- $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} - (\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} + \mathfrak{b})$
- $\mathfrak{w} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{a} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$

Wenn wir genau hinsehen, bemerken wir, dass $\mathfrak{v} - \mathfrak{u} = \mathfrak{w}$ gilt. Hieraus ergibt sich, dass $\mathfrak{w}$ auf der Ebene liegt, die durch $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ aufgespannt wird. Wir sollen aber laut Aufgabestellung das Spatprodukt der drei Vektoren betrachen.

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) &\overset{Def}{=} \langle \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle \\
&\overset{Vektorprod}{=} \langle \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \times \tfrac{1}{2}(\mathfrak{c} + \mathfrak{b}), \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \rangle \\
&= \tfrac{1}{8}\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \rangle \\
&\overset{Skalarprod}{=} \tfrac{1}{8}[\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{c} \times \mathfrak{c}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \rangle] \\
&= \tfrac{1}{8}[\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}, \mathfrak{b} \rangle - \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}, \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle - \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle - \langle \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle] \\
&\overset{orthogonal}{=} \tfrac{1}{8}[\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}, \mathfrak{b} \rangle - \langle \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle] \\
&= \tfrac{1}{8}[(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a})] \\
&\overset{(Sp1)}{=} \tfrac{1}{8}[(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}) - (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a})] \\
&= \tfrac{1}{8} \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Nun können wir mit Satz 9.2 der Vorlesung folgern, dass die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ linaer abhängig sind. Nach Aufgabe 3 Blatt 2 liegen dann diese Vektoren auf einer Ebene.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei eine Orthonormalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ des Anschauungsraumes. Wir betrachten die in Parameterform $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + u\mathfrak{b}_1 + v\mathfrak{b}_2$ gegebene Ebene E mit

$$\mathfrak{a} = 3\mathfrak{e}_1 + 5\mathfrak{e}_2 - 2\mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{e}_1 + 2\mathfrak{e}_2 + 3\mathfrak{e}_3 \text{ und } \mathfrak{b}_2 = 2\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 - 3\mathfrak{e}_3.$$

und $u, v \in \mathbb{R}$. Ferner betrachten wir drei weitere Punkte

$$\mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{e}_1 + 6\mathfrak{e}_2 + 13\mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{p}_2 = -15\mathfrak{e}_1 + 23\mathfrak{e}_2 - 8\mathfrak{e}_3 \text{ und } \mathfrak{p}_3 = 30\mathfrak{e}_1 - 22\mathfrak{e}_2 + 7\mathfrak{e}_3.$$

Berechnen Sie den Abstand der Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ zu der Ebene E.

Lösung: Als erstes stellen wir die Vektoren durch ihre Koordinaten dar. Dieses vereinfacht unsere Rechnungen erheblich.

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix},\ \mathfrak{p}_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 23 \\ -8 \end{pmatrix},\ \mathfrak{p}_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ -22 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst die Hesse-Normalform von E. Dazu müssen wir $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2$ berechnen. Nach den Rechenregeln für Koordinaten (siehe Vorlesung 11.3 (1.7)) müssen wir dazu die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{b}_{1,2} & \mathfrak{b}_{2,2} \\ \mathfrak{b}_{1,3} & \mathfrak{b}_{2,3} \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_{1,1} & \mathfrak{b}_{2,1} \\ \mathfrak{b}_{1,3} & \mathfrak{b}_{2,3} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_{1,1} & \mathfrak{b}_{2,1} \\ \mathfrak{b}_{1,2} & \mathfrak{b}_{2,2} \end{vmatrix}$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

berechnen. Wir bekommen also $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Durch die Normierung bekommen wir den Stellungsvektor $\mathfrak{e} = \frac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die Berechnung des Skalarproduktes $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle$ nach 11.3 (1.6) gibt uns

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{24}{\sqrt{171}}$$

Die Hesse Normalform von E lautet also

$$\langle \mathfrak{x}, \frac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{24}{\sqrt{171}}$$

Nun können wir die Abstände der Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ bestimmen. Der Abstand eines Punktes $\mathfrak{p}$ zur Ebene E berechnet sich nach 7.6 der Vorlesung als Betrag von $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle$. In unserer Situation bekommen wir

a) $$|\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{e} \rangle - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle| = |\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = |\tfrac{24}{\sqrt{171}} - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = 0$$

b) $$|\langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{e} \rangle - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle| = |\langle \begin{pmatrix} -15 \\ 23 \\ -8 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = |\tfrac{366}{\sqrt{171}} - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = \tfrac{342}{\sqrt{171}} = 6\sqrt{19}$$

c) $$|\langle \mathfrak{p}_3, \mathfrak{e} \rangle - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle| = |\langle \begin{pmatrix} 30 \\ -22 \\ 7 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = |\tfrac{-498}{\sqrt{171}} - \tfrac{24}{\sqrt{171}}| = \tfrac{513}{\sqrt{171}} = 9\sqrt{19}$$