Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse Paderborn, den 27. Oktober 2003
Abgabe bis 4. November 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 3

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei eine Ebene E in Hessescher Normalform $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e} \rangle = d$ mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ und einer reellen Zahl d. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Punkt $\mathfrak{p} = t\mathfrak{e}$.

a) Welchen Wert muss t annehmen, damit der Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Ebene E liegt?

b) Beweisen Sie, dass für einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene immer $|\mathfrak{x}| \geq t$ gilt.

c) Wann genau gilt in b) die Gleichheit?

Hinweis zu b): Betrachten Sie den Vektor $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ und $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{y} \rangle$.

Lösung:

a) Wenn der Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Ebene liegt, dann erfüllt er die Gleichung $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle = d$ bzw. $\langle t\mathfrak{e}, \mathfrak{e} \rangle = d$. Dieser Ausdruck lässt sich wegen der Eigenschaft (S 2) des Skalarproduktes zu $t\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e} \rangle = d$ umformen. Hieraus ergibt sich wegen $\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e} \rangle = |\mathfrak{e}||\mathfrak{e}|cos(\angle(\mathfrak{e}, \mathfrak{e})) = 1$, dass $t = d$ ist. Wir müssen also $t = d$ wählen, wenn wir verlangen, dass der Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Ebene E liegt.

b) Wir betrachten zunächst das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{y} \rangle$, wobei $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ ist, und $\mathfrak{x}$ sowie $\mathfrak{p}$ auf E liegen.

$$\begin{array}{rcll}
\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{y} \rangle & = & \langle t\mathfrak{e}, \mathfrak{x} - \mathfrak{p} \rangle & \text{Definition von } \mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{y} \\
& = & \langle t\mathfrak{e}, \mathfrak{x} \rangle - \langle t\mathfrak{e}, \mathfrak{p} \rangle & \text{(S 3)} \\
& = & t\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{x} \rangle - t\langle \mathfrak{e}, t\mathfrak{e} \rangle & \text{(S 2) und Definition von } \mathfrak{p} \\
& = & t\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{x} \rangle - t^2\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e} \rangle & \text{(S 2)} \\
& = & t * d - t^2 & x \text{ liegt auf Ebene } E \\
& = & d^2 - d^2 = 0 & t = d, \text{ da } \mathfrak{p} \text{ ein Punkt der Ebene ist}
\end{array}$$

Wir schauen uns nun das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$ an. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcll}
\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle & = & \langle \mathfrak{y} + \mathfrak{p}, \mathfrak{y} + \mathfrak{p} \rangle & \text{Zusammenhang von } \mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{y} \\
& = & \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle + \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{p} \rangle + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{y} \rangle + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle & \text{mehrfach (S 2) und (S 3) anwenden} \\
& = & \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle & \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{y} \rangle = 0 \text{ und (S 1)} \\
& = & |\mathfrak{y}|^2 + \langle t\mathfrak{e}, t\mathfrak{e} \rangle & \text{(S 4) und Definition von } \mathfrak{p} \\
& \geq & 0 + t * t * \langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e} \rangle & \text{(S 2), (S 1)} \\
& \geq & t^2 &
\end{array}$$

Nun können wir also $|\mathfrak{x}|^2 \overset{(S4)}{=} \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \geq t^2$ schliessen und daraus dann auch $|\mathfrak{x}| \geq |t|$. Ferner bekommen wir aufgrund von $|t| \geq t$, dass $|\mathfrak{x}| \geq t$ gilt.

c) Es gelte in b) die Gleichheit, das heisst $|\mathfrak{x}|^2 = t^2$ bzw. $|\mathfrak{y}|^2 + \langle t\mathfrak{e}, t\mathfrak{e}\rangle = t^2$, was sich wegen (S 2) und (S 1) zu $|\mathfrak{y}|^2 + t^2\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e}\rangle = t^2$ umformen lässt. Die Erinnerung an $\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e}\rangle = 1$ sowie die Substraktion auf beiden Seiten von t^2 führt uns auf die Gleichung $|\mathfrak{y}|^2 = 0$. Dann muss aber $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$ gelten.

Nehmen wir andererseits $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$ an, so ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ und wir erhalten aus der Beziehung $|\mathfrak{x}|^2 = |\mathfrak{y}|^2 + \langle t\mathfrak{e}, t\mathfrak{e}\rangle$ die Gleichung $|\mathfrak{x}|^2 = \langle t\mathfrak{e}, t\mathfrak{e}\rangle$, die sich mittels (S 2) und (S 1) zu $|\mathfrak{x}|^2 = t^2\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e}\rangle$ und dann aufgrund $\langle \mathfrak{e}, \mathfrak{e}\rangle = 1$ zu $|\mathfrak{x}|^2 = t^2$ umformen lässt. Ist nun $t \geq 0$, so gilt $|\mathfrak{x}| = t$, ansonsten liegt immer eine Ungleichung vor.

Fazit: Die Gleichheit in b) gilt genau dann, wenn $t \geq 0$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$ ist.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei von Null verschiedene Vektoren und für ein $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind orthogonal.

b) Es ist
$$t = -\frac{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle}{|\mathfrak{b}|^2}.$$

Lösung: Die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = 0$ gilt. Hieraus ergibt sich folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\rangle + t\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle + t\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle
\end{aligned}$$

Mittels der Identität $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = |\mathfrak{b}|^2$ lässt sich die letzte Zeile der Kette äquivalent zu
$$t = -\frac{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle}{|\mathfrak{b}|^2}$$
umformen.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C.

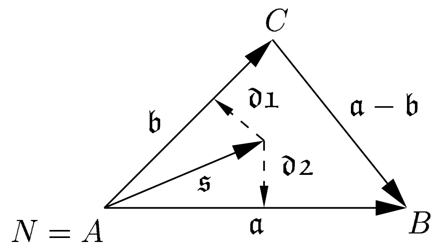
a) Stellen Sie die Geradengleichungen der drei Winkelhalbierenden auf.

b) Bestimmen Sie rechnerisch einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{s}$ der Winkelhalbierenden.

c) Berechnen Sie den Abstand von $\mathfrak{s}$ zu den Dreiecksseiten.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis aus c).

Lösung: Wir betrachten das Dreieck gemäß folgender Abbildung



a) Nach den Übungen ist bekannt, wie ein Vektor entlang der Winkelhalbierenden zu finden ist. Als Geradengleichungen ergeben sich:

- $w_A(s_1) = (\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} + \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|})s_1$
- $w_B(s_2) = \mathfrak{a} + (\frac{-\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} + \frac{-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})s_2$
- $w_C(s_3) = \mathfrak{b} + (\frac{-\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|} + \frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})s_3$

b) Wir errechnen zunächst einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{s}$ der Geraden w_A und w_B. Das Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ergibt

$$(\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} + \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|})s_1 = \mathfrak{a} + (\frac{-\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} + \frac{-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})s_2$$

und nach Umsortieren

$$(\frac{s_1}{|\mathfrak{a}|} + \frac{s_2}{|\mathfrak{a}|} + \frac{s_2}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} - 1)\mathfrak{a} + (\frac{s_1}{|\mathfrak{b}|} - \frac{s_2}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})\mathfrak{b} = \mathfrak{o}.$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren sind, muss also

$$\frac{s_1}{|\mathfrak{b}|} - \frac{s_2}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} = 0 \text{ und } \frac{s_1}{|\mathfrak{a}|} + \frac{s_2}{|\mathfrak{a}|} + \frac{s_2}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} = 1$$

gelten. Durch Umformen erhalten wir $s_1 = \frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}s_2$ und dieses eingesetzt in die erste Gleichung lässt uns

$$s_2 = \frac{|\mathfrak{a}||\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}$$

sowie dann weiter

$$s_1 = \frac{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}$$

erkennen. Die Geraden w_A und w_B schneiden sich also in

$$\mathfrak{s} = (\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} + \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|})s_1$$

bzw.

$$\mathfrak{s} = \frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{a} + \frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{b}.$$

Nun ist noch zu prüfen, ob der Punkt $\mathfrak{s}$ ein Punkt der Gerade w_C ist. Aus der Gleichung

$$\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{a} + \frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{b} = \mathfrak{b} + (\frac{-\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|} + \frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})s_3$$

ergibt sich durch Zusammenfassen der jeweiligen Vorfaktoren

$$\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{a}+\frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{b}=\frac{s_3}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\mathfrak{a}+(1-\frac{s_3}{|\mathfrak{b}|}-\frac{s_3}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|})\mathfrak{b}.$$

Ein Vergleich der Vorfaktoren von $\mathfrak{a}$ ergibt $s_3=\frac{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}||\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}$. Jetzt ist noch zu prüfen, ob mit dem gesetzen s_3 auch noch die Vorfaktoren von $\mathfrak{b}$ übereinstimmen.

$$1-\frac{s_3}{|\mathfrak{b}|}-\frac{s_3}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}=1-\frac{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}||\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\frac{1}{|\mathfrak{b}|}-\frac{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}||\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}=$$

$$1-\frac{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}-\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}=\frac{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|-|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|-|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}$$

$$=\frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}$$

Damit ist $\mathfrak{s}$ auch ein Punkt von w_C.

c) Wir setzen $\mathfrak{d}_1=-\mathfrak{s}+t_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}_2=-\mathfrak{s}+t_2\mathfrak{a}$ und verlangen, dass $\mathfrak{d}_1$ orthogonal zu $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}_2$ orthogonal zu $\mathfrak{a}$ ist ($\mathfrak{d}_1$ ist der Abstandvektor von $\mathfrak{s}$ zur Seite AC, $\mathfrak{d}_2$ der Abstandsvektor von $\mathfrak{s}$ zur Seite AB).
Zunächst bestimmen wir t_1 und t_2. Aus der Orthogonalität ergibt sich $\langle\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}\rangle=0$ bzw. $\langle\mathfrak{d}_2,\mathfrak{a}\rangle=0$. Setzen wir für $\mathfrak{d}_1=-\mathfrak{s}+t_1\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{d}_2=-\mathfrak{s}+t_2\mathfrak{a}$ und wenden wir die Eigenschaften des Skalarproduktes an, so erhalten wir

$$t_1=\frac{\langle\mathfrak{s},\mathfrak{b}\rangle}{\langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle},\ \text{und}\ t_2=\frac{\langle\mathfrak{s},\mathfrak{a}\rangle}{\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle}.$$

Um $|\mathfrak{d}_1|=|\mathfrak{d}_2|$ einzusehen, reicht es wegen $|\mathfrak{x}|^2=\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle$ die Gleichheit der Skalarprodukte $\langle\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_1\rangle$ und $\langle\mathfrak{d}_2,\mathfrak{d}_2\rangle$ nachzuweisen. Wir schauen uns diese Produkte mal näher an.

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_1\rangle &= \langle\tfrac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>}\mathfrak{b}-\mathfrak{s},\ \tfrac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>}\mathfrak{b}-\mathfrak{s}>\\ &= (\tfrac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>})^2<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>-2\tfrac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>^2}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>}+\langle\mathfrak{s},\mathfrak{s}\rangle\\ &= \langle\mathfrak{s},\mathfrak{s}\rangle-\tfrac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>^2}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>}\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\langle\mathfrak{d}_2,\mathfrak{d}_2\rangle=\langle\mathfrak{s},\mathfrak{s}\rangle-\frac{\langle\mathfrak{s},\mathfrak{a}\rangle^2}{\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle}.$$

Können wir nun zeigen, dass die obigen Bruchterme übereinstimmen, so haben wir die Gleichheit der Skalarprodukte $\langle\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_1\rangle$ und $\langle\mathfrak{d}_2,\mathfrak{d}_2\rangle$ nachgewiesen. Dazu betrachten wir folgende Ausdrücke:

$$\langle\mathfrak{s},\mathfrak{a}\rangle\overset{\text{Ortsvektor zu } s}{=}\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle+\frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$$

sowie

$$\langle\mathfrak{s},\mathfrak{b}\rangle\overset{\text{Ortsvektor zu } s}{=}\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle+\frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$$

Nun können wir die beiden Brüche vergleichen:

$$\begin{aligned}\frac{<\mathfrak{s},\mathfrak{a}>^2}{<\mathfrak{a},\mathfrak{a}>} &= \frac{|\mathfrak{b}|^2}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \\ &+\frac{2|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \\ &+\frac{1}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{<\mathfrak{s},\mathfrak{b}>^2}{<\mathfrak{b},\mathfrak{b}>} &= \frac{1}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle^2 \\ &+\frac{2|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \\ &+\frac{|\mathfrak{a}|^2}{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)^2}\langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle\end{aligned}$$

Hierbei wurde zunächst $\langle\mathfrak{s},\mathfrak{b}\rangle^2$ bzw.$\langle\mathfrak{s},\mathfrak{a}\rangle^2$ berechnet, dann durch den jeweiligen Nenner $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle$ bzw. $\langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$ geteilt. Beachten wir die Identität $\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle = |\mathfrak{x}|^2$ für einen Vektor $\mathfrak{x}$, dann sind die obigen Ausdrücke gleich und es gilt also tatsächlich $\langle\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_1\rangle = \langle\mathfrak{d}_2,\mathfrak{d}_2\rangle$. Die Abstände von $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{a}$ bzw. zu $\mathfrak{b}$ stimmen damit überein.

Wir müssen noch den Abstand des Punktes $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ bestimmen. Dazu spannen wir das selbe Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C vom Punkte B her auf. Die so eben durchgeführten Rechnungen und Ergebnisse lassen sich auf dann auf die neue Situation übertragen. Wir können also schließen, dass $|\mathfrak{d}_1| = |\mathfrak{d}_3|$ ist. Hierbei bezeichne $\mathfrak{d}_3$ den Vektor, der vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zur Dreiecksseite BC hin orientiert ist.

Insgesamt haben wir also $|\mathfrak{d}_1| = |\mathfrak{d}_2| = |\mathfrak{d}_3|$ gezeigt.

d) Aus dem Ergebnis in c) können wir folgern: *Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{s}$, der von den Dreiecksseiten den selben Abstand hat.*

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben seien zwei Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal sind, dann sind sie auch linear unabhängig.

b) Wenn $\mathfrak{a}$ orthogonal zu $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal zu $\mathfrak{c}$ ist, so ist auch $\mathfrak{a}$ orthogonal zu $\mathfrak{c}$.

c) Ein System von Vektoren, welches mindestens einen von Null verschiedenen Vektor enthält, besitzt ein linear unabhängiges Teilsystem.

d) Liegen die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht auf einer Ebene, so gilt entweder $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0$ oder $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle = 0$ oder $\langle\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = 0$.

Lösung:

a) Die Aussage ist richtig! Hier folgt ein Beweis.

Weil $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonal sind, gilt also $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$. Wir gehen nun von der Linearkombination $r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ aus und müssen $r = s = 0$ zeigen. Dazu betrachten wir

$$\langle \mathfrak{a}, r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{o} \rangle = 0 \text{ und } \langle \mathfrak{b}, r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{o} \rangle = 0.$$

Wir können mittels den Regeln, die für das Skalarprodukt gelten, die beiden obigen Produkte zu

$$r\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle + s\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0 \text{ und } r\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle + s\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = 0$$

umformen. Wegen $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$ können wir die Gleichungen noch zu

$$r\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0 \text{ und } s\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = 0$$

vereinfachen. Nun sind die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beiden von Null verschieden. Daher ist dann auch $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle \neq 0$ sowie $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \neq 0$. Wir können also durch diese von Null verschiedenen Zahlen teilen und erhalten $r = s = 0$. Damit sind die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear unabhängig.

b) Die Aussage gilt nicht!

Wir wählen zwei orthogonale Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und setzen $c = -\mathfrak{a}$. Dann gilt einerseits $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$ und $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{b}, -\mathfrak{a} \rangle = -\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$, aber auch $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \rangle = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = |\mathfrak{a}|^2 \neq 0$. Denn der Vektor $\mathfrak{a}$ ist ein von Null verschiedener Vektor. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ sind also nicht orthogonal.

c) Die Aussage ist richtig!

Wir wählen einen Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ aus diesem System. Betrachten wir die Gleichung $r\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ so ist sie nur für $r = 0$ lösbar. Dieses ist gerade die Definition der linearen Unabhängigkeit. Das System enthält also den Vektor $\mathfrak{a}$ als lineares Teilsystem.

d) Die Aussage ist falsch!

Wir können die Aussage in d) logisch gleichwertig umformen und zwar zu:

Wenn $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \neq 0$ und $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle \neq 0$ und $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle \neq 0$ gilt, dann liegen die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ auf einer Ebene.

Wir wählen eine Orthonormalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_3$. Dann können wir folgende Aussagen ableiten:

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 \rangle = \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \rangle + \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_3 \rangle + \langle \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2 \rangle + \langle \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 \rangle = \langle \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2 \rangle \neq 0$$

Analog sehen wir $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1 \rangle \neq 0$ sowie $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_3 \rangle \neq 0$ ein.

Wir machen uns jetzt klar, dass das System der Vektoren $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$,$\mathfrak{c}$ linear unabhängig ist. Mit der Aufgabe 3 des Blattes 2 können wir dann schliessen, dass die drei Vektoren nicht auf einer Ebene liegen ($\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie auf einer Ebene liegen).

Wir müssen also $r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b} + t\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ betrachten und zeigen, dass $r = s = t = 0$ gilt. Wir können die Gleichung $r\mathfrak{a}+s\mathfrak{b}+t\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ mittels der Definition von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ (siehe oben) zu

$$(r + t)\mathfrak{e}_1 + (r + s)\mathfrak{e}_2 + (s + t)\mathfrak{e}_3$$

umformen. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$r + t = 0, \quad r + s = 0, \quad s + t = 0$$

bzw. das äquivalente umgeformte Gleichungssystem

$$r = -t, \quad s = t, \quad 2t = 0$$

Hier lesen wir zunächst $t = 0$, dann $s = t = 0$ und schliesslich $r = -t = 0$ ab. Die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind also tatsächlich linear unabhängig.

Hier haben wir also ein Gegenbeispiel gefunden.