Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 28. Oktober 2003

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 2

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Tetraeder, dessen Eckpunkte durch die Ortsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ bestimmt sind.

a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_4$ der Schwerpunkte der vier Dreiecksseiten.

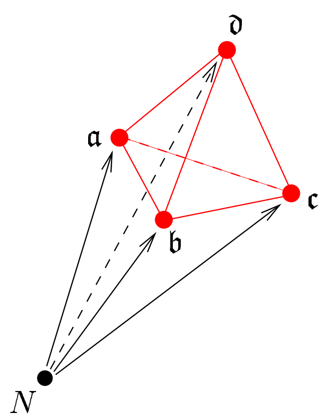
b) Bestimmen Sie die Geraden, die jeweils durch einen Eckpunkt des Tetraedes und den gegenüberliegenden Schwerpunkt $\mathfrak{s}_i$ für $i = 1, \ldots, 4$ bestimmt werden. Geben Sie diese Geraden in der Punktrichtungsform an.

c) Finden Sie einen gemeinsamen Punkt der vier Geraden aus b).

d) In welchem Verhältnis teilt dieser Punkt jeweils die Strecke von einem Eckpunkt zu dem gegenüberliegenden Dreiecksschwerpunkt?

Lösung:

a) Man betrachte die folgende Skizze:



In Kapitel 1.5.6 der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ eines Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ durch die Formel

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\right)$$

berechnen lässt. Unsere Schwerpunkte der vier Dreiecksseiten unseres Tetraeders sind somit $\mathfrak{s}_1 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\right)$, $\mathfrak{s}_2 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}\right)$, $\mathfrak{s}_3 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{d}\right)$ und $\mathfrak{s}_4 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}\right)$.

b) $g_1 : \mathfrak{d} + r_1(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{d})$, $g_2 : \mathfrak{a} + r_2(\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{a})$, $g_3 : \mathfrak{c} + r_3(\mathfrak{s}_3 - \mathfrak{c})$ und $g_4 : \mathfrak{b} + r_4(\mathfrak{s}_4 - \mathfrak{b})$ sind die gesuchten Geraden in Punktrichtungsform.

c) Betrachte den Punkt

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{4}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}).$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein gemeinsamer Punkt der vier Geraden aus b) ist. Setzen wir $r_1 = \frac{3}{4}$ in g_1 ein, so folgt

$$\mathfrak{d} + \frac{3}{4}(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{d}) = \mathfrak{d} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) - \mathfrak{d}\right) = \frac{1}{4}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{p}.$$

Somit ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt der Geraden g_1. Auf die gleiche Weise zeigt man, dass für $r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{4}$ der Punkt $\mathfrak{p}$ ebenfalls auf den Geraden g_2, g_3 und g_4 liegt. Der Punkt $\mathfrak{p}$ ist also ein Schnittpunkt der vier Geraden aus b).

d) Die vier Strecken, welche jeweils durch einen Eckpunkt des Tetraeders und seinem gegenüberliegenden Dreiecks Schwerpunkt bestimmt werden, treffen sich in einem gemeinsamen Punkt $\mathfrak{p}$. Dieser teilt die Strecken jeweils im Verhältnis 3:1.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Es seien zwei Geraden $G_1 = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1 + r\mathfrak{b}_1 \text{ für } r \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_2 + s\mathfrak{b}_2 \text{ für } s \in \mathbb{R}\}$ durch ihre Punktrichtungsform gegeben. Zeigen Sie folgende Sachverhalte:

a) Die zwei Geraden G_1 und G_2 stimmen genau dann überein, wenn sie parallel sind und einen gemeinsamen Punkt haben.

b) Sind G_1 und G_2 zwei parallele Geraden, so folgt, dass sie entweder übereinstimmen oder keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

c) Wenn die Geraden G_1 und G_2 zwei gemeinsame Punkte besitzen, so stimmen sie überein.

Lösung:

a) Wir zeigen zunächst die Implikation von links nach rechts (" $\Rightarrow$ "): Wenn die beiden Geraden G_1 und G_2 übereinstimmen, dann sind diese parallel und haben einen gemeinsamen Punkt.

Da $G_1 = G_2$ ist, gelten die folgenden Eigenschaften (vgl. Vorlesung):

1. $\mathfrak{b}_2 = a\mathfrak{b}_1$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 = b\mathfrak{b}_1$ mit $b \in \mathbb{R}$

Aus der ersten der beiden Eigenschaften erhalten wir die Parallelität von G_1 und G_2. Wir wählen einen festen Punkt $\mathfrak{s} \in G_1$ und zeigen, dass dieser auch zur Menge G_2 gehört, also ein gemeinsamer Punkt von G_1 und G_2 ist. Sei also $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 + r_0\mathfrak{b}_1$ mit $r_0 \in \mathbb{R}$ Punkt aus G_1. Wir erhalten durch Anwenden der obigen Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s} &= \mathfrak{a}_1 + r_0\mathfrak{b}_1 \\ &= \mathfrak{a}_2 - b\mathfrak{b}_1 + r_0\mathfrak{b}_1 && \text{(zweite Eigenschaft anwenden)} \\ &= \mathfrak{a}_2 - b(\tfrac{1}{a}\mathfrak{b}_2) + r_0(\tfrac{1}{a}\mathfrak{b}_2) && \text{(erste Eigenschaft anwenden)} \\ &= \mathfrak{a}_2 + (\tfrac{r_0}{a} - \tfrac{b}{a})\mathfrak{b}_2\end{aligned}$$

Somit ist $\mathfrak{s}$ auch ein Punkt der Geraden G_2.

Wir müssen noch die Implikation von rechts nach links (" $\Leftarrow$ ") zeigen: Wenn die beiden Geraden G_1 und G_2 parallel sind und einen gemeinsamen Punkt haben, dann stimmen sie überein.

Da G_1 und G_2 parallel sind, gilt $\mathfrak{b}_2 = a\mathfrak{b}_1$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 = b\mathfrak{b}_1$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.
Sei $\mathfrak{p}$ der gemeinsame Punkt von G_1 und G_2. Daher lässt sich $\mathfrak{p}$ sowohl als

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 + r_0\mathfrak{b}_1$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$ als auch

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_2 + s_0\mathfrak{b}_2$$

für ein $s_0 \in \mathbb{R}$ schreiben. Somit folgt:

$$\mathfrak{a}_1 + r_0\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + s_0\mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 = s_0\mathfrak{b}_2 - r_0\mathfrak{b}_1$$

Wegen $\mathfrak{b}_2 = a\mathfrak{b}_1$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 &= s_0(a\mathfrak{b}_1) - r_0\mathfrak{b}_1 \\ &= (s_0 a - r_0)\mathfrak{b}_1\end{aligned}$$

G_1 und G_2 stimmen also überein.

b) Seien nun G_1 und G_2 parallel.
1. Fall: G_1 und G_2 haben einen gemeinsamen Punkt, dann sind sie nach Teil a) schon identisch.
2. Fall: G_1 und G_2 haben keinen gemeinsamen Punkt.
Nun ist also gezeigt, dass parallele Geraden entweder identisch oder echt parallel sind, da nicht mehr Fälle auftreten können.

c) Angenommen die Geraden G_1 und G_2 haben zwei gemeinsame Punkt $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Nach Teil a) reicht es zu zeigen, dass G_1 und G_2 parallel sind. Dazu betrachten wir die beiden unterschiedlichen Darstellungen der gemeinsamen Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$:

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_1 + r_0\mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_2 + r_1\mathfrak{b}_2$$

sowie

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a}_1 + s_0\mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a}_2 + s_1\mathfrak{b}_2$$

mit $r_0, r_1, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$. Bilden wir die Differenz der ersten beiden Gleichung und dann der zweiten so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 = (s_0 - r_0)\mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 = (s_1 - r_1)\mathfrak{b}_2.$$

Hieraus können wir $(s_0 - r_0)\mathfrak{b}_1 = (s_1 - r_1)\mathfrak{b}_2$ folgern. Weil $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei verschiedene Punkte sind, kann also nicht $s_0 = r_0$ bzw. $s_1 - r_1 = 0$ gelten. Wir können also durch $s_0 - r_0$ dividieren und erhalten $\mathfrak{b}_1 = \frac{s_1 - r_1}{s_0 - r_0}\mathfrak{b}_2$ mit $\frac{s_1 - r_1}{s_0 - r_0} \neq 0$. Die Geraden G_1 und G_2 sind also parallel.

□

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Gegeben seien vier Punkte durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$. Zeigen Sie, dass aus der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ folgt, dass diese drei Vektoren in einer Ebene liegen. Gilt auch die Umkehrung?

Lösung: Seien $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ linear abhängige Vektoren. Es gibt daher reelle Zahlen r, s und t, die nicht alle Null sind mit

$$r(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) + s(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) + t(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) = \mathfrak{o}$$

Es gelte ohne Einschränkung $r \neq 0$. Dann folgt:

$$(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) = (-\frac{s}{r})(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) + (-\frac{t}{r})(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0)$$

Liegen $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0)$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ nicht auf einer Geraden, so ist $(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0)$ ein Punkt der Ebene durch den Nullpunkt, welche durch die Menge

$$E := \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = u(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) + v(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) \text{ mit } u, v \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben ist.

Andernfalls gibt es ein $0 \neq w \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0 = w(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0)$ und die obige Beziehung ändert sich zu

$$(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) = (-\frac{sw}{r} - \frac{t}{r})(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0).$$

Die Punkte, die durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ gegeben sind, liegen also auf einer Geraden G durch den Nullpunkt. Nun können wir durch die Wahl eines Punktes $\mathfrak{p}$, der nicht auf G liegt, eine Ebene $\widetilde{E}$ durch den Nullpunkt finden, die durch die Menge

$$\tilde{E} := \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = u(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) + v\mathfrak{p} \text{ mit } u, v \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben ist und auf der die Punkte $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ liegen.

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Dazu nehmen wir an, dass die Punkte, die durch die Ortsvektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ gegeben sind, auf der Ebene

$$E : \mathfrak{x} = r\mathfrak{a} + s\mathfrak{b}$$

liegen. Es gilt daher

$$\begin{array}{rrcl} (I) & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0 & = & r_1\mathfrak{a} + s_1\mathfrak{b} \\ (II) & \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0 & = & r_2\mathfrak{a} + s_2\mathfrak{b} \\ (III) & \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0 & = & r_3\mathfrak{a} + s_3\mathfrak{b}. \end{array}$$

Als erstes stellen wir fest, dass nicht r_1 und s_1 gleichzeitg Null sein können, denn sonst ergibt sich nach (I) $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_o$. Dieses kann aber nicht sein, da wir von vier unterschiedliche Punkte ausgehen. Unter anderem zeigen unsere Betrachtungen, dass $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0 \neq 0$ gelten. Ohne Einschränkung nehmen wir $r_1 \neq 0$ annehmen.

Durch Betrachten der Differenzen $r_2(I) - r_1(II)$ und $(r_3)(I) - r_1(III)$ bekommen wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rrcl} (IV) & r_2(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) - r_1(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) & = & (r_2 s_1 - r_1 s_2)\mathfrak{b} \\ (V) & r_3(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) - r_1(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) & = & (r_3 s_1 - r_1 s_3)\mathfrak{b} \end{array}$$

1. Fall $(r_2 s_1 - r_1 s_2) = 0$: Dann vereinfacht sich die Gleichung (IV) zu

$$r_2(a_1 - a_0) - r_1(a_2 - a_0) = \mathfrak{o}$$

. Wir erinnern daran, dass r_1 eine von Null verschiedene reelle Zahl ist. Ergänzen wir die Gleichung noch durch $0(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0)$, so ergibt sich

$$r_2(a_1 - a_0) - r_1(a_2 - a_0) + 0(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) = r_2(a_1 - a_0) - r_1(a_2 - a_0) = \mathfrak{o}.$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ sind also linear abhängig.

2. Fall $(r_2 s_1 - r_1 s_2) \neq 0$: Dann können wir (IV) auf die Form

$$\mathfrak{b} = \frac{r_2}{r_2 s_1 - r_1 s_2}(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) + \frac{-r_1}{r_2 s_1 - r_1 s_2}(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0)$$

bringen. Das Einsetzen dieser umgeformten Gleichung in (V) führt uns auf

$$r_3(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) + (-r_1)(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) + (-\frac{(r_3 s_1 - r_1 s_3) r_2}{r_2 s_1 - r_1 s_2})(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_o) + (\frac{(r_3 s_1 - r_1 s_3) r_1}{r_2 s_1 - r_1 s_2})(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) = \mathfrak{o}.$$

Ordnen wir den Ausdruck etwas um, so erhalten wir

$$(r_3 - \frac{(r_3 s_1 - r_1 s_3) r_2}{r_2 s_1 - r_1 s_2})(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_o) + (\frac{(r_3 s_1 - r_1 s_3) r_1}{r_2 s_1 - r_1 s_2})(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0) + (-r_1)(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0) = \mathfrak{o}.$$

Wir können also wegen $r_1 \neq 0$ wiederum auf die Lineareabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0$ schließen. □

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Seien $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ linear unabhängige Vektoren und seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2 = c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

Lösung: Es sind also die folgenden beiden Implikationen zu zeigen:

a) $\mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2 = c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2$ sind linear unabhängig $\Rightarrow ad - bc \neq 0$

b) $ad - bc \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2 = c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2$ sind linear unabhängig

Wir zeigen zunächst a). Seien $\mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2 = c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ linear unabhängig, d.h. $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{o}$ und die Gleichung

$$s\mathfrak{b}_1 + t\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ist nur für $s = t = 0$ lösbar. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} s\mathfrak{b}_1 + t\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o} & \Rightarrow & s(a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2) + t(c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{o} \\ & \Rightarrow & (sa + tc)\mathfrak{a}_1 + (sb + td)\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, dass die Ausdrücke $sa + tc$ und $sb + td$ beide gleich Null sind. Dies führt uns zu der Frage, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sa + tc &= 0 \\ sb + td &= 0 \end{aligned}$$

lösbar ist. Subtrahieren wir das a-fache der zweiten Gleichung vom b-fachen der ersten Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sa + tc &= 0 \\ 0 + (bc - ad)t &= 0 \end{aligned}$$

Angenommen $ad - bc$ wäre gleich Null. Dann wäre auch $bc - ad = 0$ und wir könnten $t \neq 0$ angeben, daraus mittels $s\mathfrak{b}_1 = -t\mathfrak{b}_2$ ein $s \neq 0$ berechnen, so dass $s, t \neq 0$ das Gleichungssystem lösen würden. Damit hätten wir jedoch einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$. Also war unsere Annahme falsch und es gilt daher $ad - bc \neq 0$.

Wir wollen nun b) zeigen. Seien $\mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2 = c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben und es gelte $ad - bc \neq 0$. Wir müssen die lineare Unabhängigkeit von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ zeigen, also folgende Dinge:

1. $\mathfrak{b}_1 \neq 0$ und $\mathfrak{b}_2 \neq 0$
2. Aus $s\mathfrak{b}_1 + t\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}$ folgt, dass $s = t = 0$ gilt.

Zu 1. : Angenommen es gelte $\mathfrak{b}_1 = a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$. Dann würde aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ folgen, dass $a = b = 0$ gilt. Somit wäre auch $ad - bc = 0$, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ wäre. Also gilt $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{o}$. Ebenso zeigt man, dass auch $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{o}$ gilt.

Zu 2. : Wir betrachten die Folgerungskette

$$\begin{aligned} s\mathfrak{b}_1 + t\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o} \quad &\Rightarrow \quad s(a\mathfrak{a}_1 + b\mathfrak{a}_2) + t(c\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{o} \\ &\Rightarrow \quad (sa + tc)\mathfrak{a}_1 + (sb + td)\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \end{aligned}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ erhalten wir wiederum das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sa + tc &= 0 \\ sb + td &= 0, \end{aligned}$$

welches wiederum äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sa + tc &= 0 \\ 0 + (bc - ad)t &= 0 \end{aligned}$$

ist. Nach Voraussetzung gilt $ad - bc \neq 0$. Also ist auch $bc - ad \neq 0$ und daher erhalten wir aus der zweiten Gleichung, dass $t = 0$ sein muss. Ferner erhalten wir aus der ersten Gleichung $sa = 0$. Falls $a \neq 0$ ist, so muss $s = 0$ sein und wir sind fertig. Falls aber $a = 0$ gilt, so folgt wegen $ad - bc \neq 0$, dass $bc \neq 0$ und somit auch $b \neq 0$ ist. Wegen $sb + td = 0$ folgt, da $t = 0$ und $b \neq 0$ gelten, dass $s = 0$ ist. $\square$