Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 22. Oktober 2003

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Musterlösung zu Blatt 1

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Es seien zwei verschiedene Punkte durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben. Für ein $s \neq 1$ setzen wir $\mathfrak{y} = \mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{y} - \mathfrak{a} = s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$, $\mathfrak{b} - \mathfrak{y} = (1-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{y} - \mathfrak{a} = \frac{s}{1-s}(\mathfrak{b} - \mathfrak{y})$ gilt. Geben Sie, falls nötig, beim Umformungsschritt das jeweilige Gesetz $(A1), \ldots, (A4)$ bzw. $(M1), \ldots, (M4)$ an.

Lösung: Es werden die folgenden Rechengesetze für die Addition von Vektoren und Multiplikation von reellen Skalaren mit Vektoren verwendet:

(A1)	$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$	(M1)	$a(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = a\mathfrak{a} + a\mathfrak{b}$
(A2)	$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a}$	(M2)	$(a+b)\mathfrak{a} = a\mathfrak{a} + a\mathfrak{b}$
(A3)	$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$	(M3)	$(ab)\mathfrak{a} = a(b\mathfrak{a})$
(A4)	$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o} = (-\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$	(M4)	$1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

a)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{y} - \mathfrak{a} &= (\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})) - \mathfrak{a} \\
&= (\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})) + (-\mathfrak{a}) && \text{(Differenz von Vektoren)} \\
&\overset{(A1)}{=} (-\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})) \\
&\overset{(A3)}{=} ((-\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \\
&\overset{(A4)}{=} \mathfrak{o} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \\
&\overset{(A2)}{=} s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{b} - \mathfrak{y} &= \mathfrak{b} - (\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})) \\
&= \mathfrak{b} + (-(\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}))) \\
&= \mathfrak{b} + ((-1)(\mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}))) && \text{(verwende } -\mathfrak{x} = (-1)\mathfrak{x}\text{)} \\
&\overset{(M2)}{=} \mathfrak{b} + ((-1)\mathfrak{a} + (-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})) \\
&\overset{(A3)}{=} (\mathfrak{b} + (-1)\mathfrak{a}) + (-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \\
&= (\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a})) + (-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) && \text{(verwende } -\mathfrak{x} = (-1)\mathfrak{x}\text{)} \\
&= (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + (-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) && \text{(Differenz von Vektoren)} \\
&\overset{(M4)}{=} 1(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + (-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \\
&\overset{(M2)}{=} (1-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{y} - \mathfrak{a} &= s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) && \text{(verwende Aufgabenteil a))} \\
&= \tfrac{s}{1-s}(1-s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \\
&= \tfrac{s}{1-s}(\mathfrak{b} - \mathfrak{y}) && \text{(verwende Aufgabenteil b))}
\end{aligned}$$

Beim Erweitern mit $\frac{1-s}{1-s}$ geht $s \neq 1$ ein.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Die nicht parallelen Vektoren $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ spannen ein Parallelogramm auf (siehe Abbildung 1).

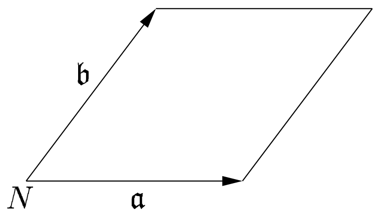

Abbildung 1: Das aufgespannte Parallelogramm

a) Geben Sie die Ortsvektoren der Parallelogrammecken relativ zu N an.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichungen der zwei Flächendiagonalen.

c) Geben Sie einen gemeinsamen Punkt der Diagonalen an.

d) Wie lässt sich das Ergebnis in c) interpretieren?

Lösung:

a) Die Ortsvektoren der Parallelogrammecken sind $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$.

b) Die Geradengleichung der ersten Diagonalen ist durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{o} + r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{o}) = r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben. Die zweite Geradengleichung ist durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$$

mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Ein gemeinsamer Punkt der zwei in b) gegebenen Geraden ist durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

gegeben. Denn für $r = \frac{1}{2}$ gilt

$$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{s}$$

und für $t = \frac{1}{2}$ gilt ebenfalls

$$\mathfrak{b} + t(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{s}$$

d) Die Diagonalen eines Parallelogramms scheiden sich in einem Punkt, welcher die Diagonalen halbiert.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein durch die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aufgespanntes Spat (siehe Abbildung 2).

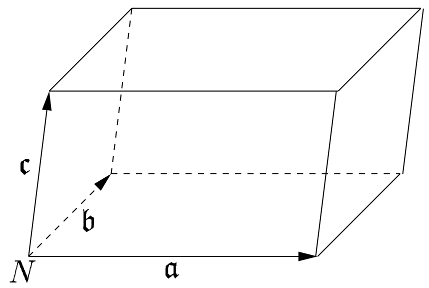

Abbildung 2: Das aufgespannte Spat

a) Geben Sie die Ortsvektoren der Eckpunkte des Spates relativ zu N an.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichungen für die vier Raumdiagonalen.

c) Geben Sie einen gemeinsamen Punkt der vier Raumdiagonalen an.

d) Wie interpretieren Sie das Ergebnis aus c)?

Lösung:

a) Die Ortsvektoren der Spatecken sind $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.

b) Die vier Raumdiagonalen werden durch folgende Geradengleichungen beschrieben:

$$\mathfrak{x}_1 = t_1(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$$

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{c} + t_2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$$

$$\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{a} + t_3(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a})$$

und

$$\mathfrak{x}_4 = \mathfrak{b} + t_4(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$$

mit $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$.
Beachte bitte, dass Geradengleichungen nicht eindeutig bestimmt sind.

c) Der Punkt

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$$

liegt auf jeder Geraden in b). Wir müssen dieses noch nachprüfen. Für

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{1}{2}$$

haben wir

$$\mathfrak{s} = t_1(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{c} + t_2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} + t_3(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} + t_4(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$$

d) Die vier Raumdiagonalen eines Spats schneiden sich in einem Punkt, welcher die Geraden halbiert.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein räumliches 5-Eck mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_5$.

a) Zeigen Sie, dass Sie die fünf Seiten $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_5$ des 5-Ecks so orientieren können, dass $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 + \cdots + \mathfrak{c}_5 = \mathfrak{o}$ gilt.

b) Lässt sich dieses Ergebnis auf ein n-Eck ($n \geq 3$) übertragen?

Lösung:

a) Wir wählen die Orientierungen von $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_5$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_1 &:= \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \\
\mathfrak{c}_2 &:= \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 \\
\mathfrak{c}_3 &:= \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_3 \\
\mathfrak{c}_4 &:= \mathfrak{a}_5 - \mathfrak{a}_4 \\
\mathfrak{c}_5 &:= \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_5
\end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\mathfrak{c}_1 + \cdots + \mathfrak{c}_5 = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_5 - \mathfrak{a}_4 + \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_5 = \mathfrak{o}$$

b) Für ein beliebiges vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ setzen wir für i von 1 bis $n-1$ die Seiten $\mathfrak{c}_i := \mathfrak{a}_{i+1} - \mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{c}_n := \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_n$ fest. Summieren wir die Vektoren $\mathfrak{c}_1$ bis $\mathfrak{c}_{n-1}$ auf, so erhalten wir zunächst

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{c}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathfrak{a}_{i+1} - \mathfrak{a}_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_\mathrm{i} = \sum_{i=2}^{n} \mathfrak{a}_\mathrm{i} - \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_\mathrm{i} = \mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_1$$

und dann

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{c}_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{c}_i \right) + \mathfrak{c}_n = \mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

Somit lässt sich die Aussage aus Teil a) auf ein räumliches n-Eck übertragen.