Wir sehen an einem Gegenbeispiel ein, dass folgende Gleichung für Unterräume U_1, U_2 und U_3 eines Vektorraumes V

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$$

im allgemeinen nicht gilt.

Wir setzen $V = \mathbb{R}^2$ und betrachten die Unterräume

$$U_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\},\ U_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \text{ und } U_3 = \{\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Dann gelten:

- $U_1 \cap U_3 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Denn aus $v \in U_1$ und $v \in U_3$ bekommen wir

  $$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$$

  mit $x, z \in \mathbb{R}$. Durch Vergleich der Komponenten ergeben sich die Gleichungen $x = z$ sowie $z = 0$. Dies bedeutet aber $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Analog ist $U_2 \cap U_3 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ einzusehen.

- $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$

- $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \mathbb{R}^2 \cap U_3 = U_3$.

- $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} + \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3$ gilt $U_3 \neq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und die obige Gleichheit ist im allgemeinen widerlegt.

Die Lage der drei Unterräume ist durch die Abbildung 1 noch einmal veranschaulicht.

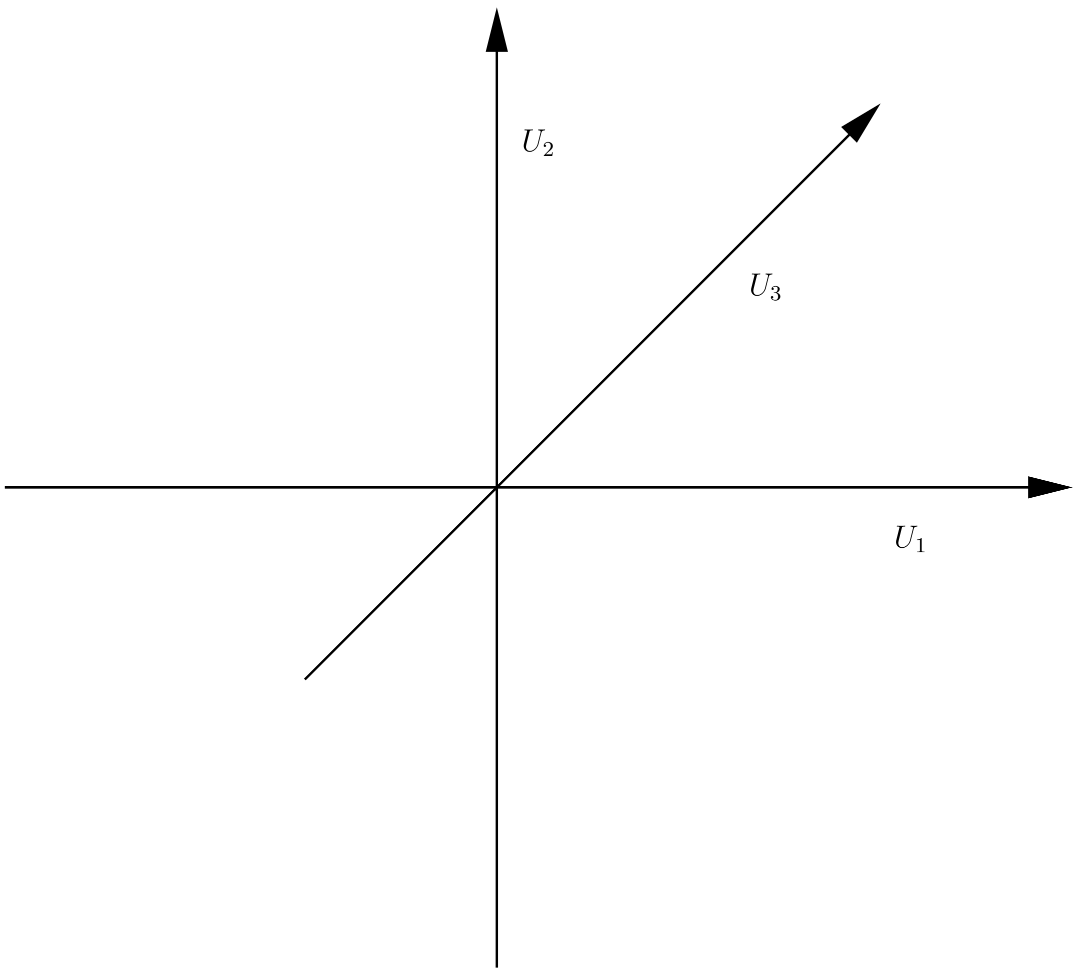

Abbildung 1: Veranschaulichung der Unterräume U_1, U_2 und U_3