Arithmetik als Prozess

Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring und Erich Ch. Wittmann (Hg.)

09.06.2003

4. Begründung der Arithmetik: Rechengesetze und Zahlbegriff

Gerd Walther und Erich Ch. Wittmann

Anhang

Vorwort

> Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.
>
> Johannes Kühnel 1916

Die ersten Versuche, konzeptuelle Ideen dieses Buches in der Lehrerbildung umzusetzen, wurden in der zweiten Hälfte der achtziger Jahre zeitgleich mit der Gründung des Projekts „mathe 2000“ unternommen. Ich habe die Entstehung des Buches zuerst als Studierende, dann als angehende Lehrerin und schließlich als wissenschaftliche Mitarbeiterin und Mitautorin von Anfang an aus unterschiedlicher Perspektive miterlebt. Die Herausgeber haben mich daher gebeten, meine persönlichen Erfahrungen als eine Art Vorwort zu dem Buch aufzuschreiben.

Als ich mein Studium für das Lehramt Primarstufe mit Schwerpunktfach Mathematik an der Universität Dortmund begann, hatte ich das Gefühl, durch mein Mathematik-Leistungskurs-Wissen bestens auf die Mathematikausbildung vorbereitet zu sein. Zu meiner großen Überraschung wurden jedoch plötzlich Fähigkeiten von mir gefordert, an die ich vorher gar nicht gedacht hatte. In den Übungen zu den fachwissenschaftlichen Vorlesungen wurde nämlich mehr als nur die Lösung der gestellten Probleme verlangt. Wir mussten auch unsere Lösungswege vorstellen, Lösungsalternativen entwickeln und die Probleme variieren. Mir wurde zunehmend bewusst, wie eng meine Auffassung von ‚der‘ Mathematik bisher gewesen war.

Während des Referendariats veränderte sich meine Sicht von Mathematik weiter. Die Kinder meines ersten Schuljahres interpretierten Aufgaben von sich aus immer wieder neu und brachten vielfältige Ideen ein. Zudem eroberten sie sich die Welt der Zahlen keineswegs in Form eines systematischen Lehrgangs. Mir wurde bewusst, dass sich der Unterricht dann am sinnvollsten gestaltet, wenn man den Entwicklungsschritten der Kinder folgt, was ständig Vorgriffe und Rückblenden erfordert, und dass man dies umso besser leisten kann, je aktiver das eigene Verhältnis zur Mathematik ist. Auch mit meinen Kindern habe ich die Mathematik als lebendige Wissenschaft erlebt, die Spielräume eröffnet.

Nach meiner Rückkehr an die Universität konnte ich die Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses von Kindern in meiner Dissertation aus mathematikdidaktischer Perspektive genauer erforschen. Dabei erfuhr ich, welch hohe Motivation von guten mathematischen Fragestellungen ausgeht. Parallel dazu lernte ich durch meine theoretischen Studien die Mathematik immer mehr als „Wissenschaft von den Mustern“ kennen und verstehen. Ich fand es anregend die Mathematik von der Grundschule bis zur Universität unter einer einheitlichen Perspektive zu sehen.

Neben den eigenen Schulerfahrungen, den Praxiserfahrungen und den Ergebnissen meiner Forschungen ist meine Sicht von Mathematik und Mathematiklernen aber auch durch meine Erfahrungen in der Ausbildung von Studierenden wesentlich geprägt worden. Meine Hauptaufgabe in der Lehre ist gegenwärtig die Organisation und Leitung der „Übungen“, die in unserer Ausbildung heute einen noch höheren Stellenwert haben als während meines Studiums. Wir regen die Studierenden systematisch an eigenständig zu arbeiten und ihre Lernprozesse selbst zu organisieren. Am Anfang des Studiums müssen wir zwar mit schöner Regelmäßigkeit mehr oder weniger lautstarke Proteste registrieren, die sich vor allem gegen einen vermeintlich zu hohen Arbeitsaufwand und zu geringe ‚Hilfsangebote' seitens der Lehrenden richten. Im weiteren Verlauf des Studiums bewerten die Studierenden ihre durch eigene Aktivität erzielten Lernerfolge aber immer positiver. Die Evaluationen unserer Veranstaltungen belegen einen günstigen Einfluss aktiver Formen des Studiums nicht nur auf die Einstellung zu aktiv-entdeckenden Lehr-/Lernformen, sondern auch auf die Einstellung zur elementaren Mathematik. Ergänzt werden diese positiven Erfahrungen mit Studierenden durch unsere Erfahrungen in der Fortbildung: Auch erfahrene Lehrerinnen und Lehrer reizt es, ihr Fachwissen unter einem neuen Aspekt aufzufrischen und anzureichern. Dies wirkt sich, wie wir immer wieder hören, belebend auf ihre Praxis aus.

Aufgrund dieser positiven Erfahrungen bin ich überzeugt, dass „Arithmetik als Prozess" einen geeigneten professionellen Rahmen bietet um echte Beziehungen zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Praxis zu knüpfen. Mit den anderen Autorinnen und Autoren bin ich daher sicher, dass sich viele angehende und praktizierende Lehrerinnen und Lehrer durch das Buch zu einer aktiven Auseinandersetzung mit der Arithmetik anregen lassen. Ich selbst freue mich schon auf die weiteren Bände der Reihe „Elementarmathematik als Prozess".

Anna Susanne Steinweg

Die Autorinnen und Autoren widmen „Arithmetik als Prozess" ihrem Mitautor Heinrich Winter, ohne dessen Pionierleistungen bei der Entwicklung aktiv-entdeckender Lehr-/Lernformen quer über die Stufen dieses Buch nicht geschrieben worden wäre.

Die Herausgeber

Einleitung: Das Konzept von „Elementarmathematik als Prozess“

Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring und Erich Ch. Wittmann

> Das wahre Problem, das sich im Mathematikunterricht stellt, betrifft nicht die formale Strenge, sondern die Entwicklung von „Bedeutung“ und die „anschauliche“ Erfassung der mathematischen Objekte.
>
> René Thom (Fields-Medaillen-Gewinner) 1972

> In einem bestimmten Sinn kann man sich die Mathematik nur selbst beibringen, und jemanden unterrichten, kann nur heißen, günstige Bedingungen dafür zu schaffen, dass der andere sich selbst unterrichten kann.
>
> Andrè Revuz 1980

> In Mathematik gibt es nur richtig oder falsch. Wir machen alles richtig.
>
> Antwort des Dekans eines Fachbereichs Mathematik einer deutschen Universität auf die Frage eines Mitglieds der Lehrkommission, was der Fachbereich tun könne, um die von Studierenden stark kritisierte Lehre zu verbessern, 1996

Die heutigen weltweiten Bemühungen um die Reform des Mathematikunterrichts gehen von folgendem Grundverständnis des Lehrens und Lernens von Mathematik aus:

1. Die Lernenden werden mehr als *aktive Subjekte* ihres Lernprozesses, weniger als Objekte der Belehrung betrachtet. Entsprechend hat sich die Aufgabe der Lehrenden von der Wissensvermittlung zur Anregung und Organisation von Lernprozessen verschoben.
2. Bei den Inhalten zählen mehr die Entwicklungs*prozesse*, die zu Verständnis führen, weniger die fertigen Wissensstrukturen.
3. Was die Zielsetzungen anbelangt, wird ein sinnerfüllter Unterricht gefordert und die *Produktion von Lösungswegen* genießt Vorrang vor der Reproduktion von Rezepten.

Diese drei Aspekte befinden sich im Einklang mit der Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“, die man aktiv und interaktiv erforschen, fortsetzen, umgestalten und selbst erzeugen kann (Devlin 1998, S. 15).
Es versteht sich von selbst, dass mit der geforderten Neuorientierung des Unterrichts eine entsprechende Neuorientierung der Lehrerbildung einhergehen muss. Denn Lehrerinnen und Lehrer können ihren Unterricht umso erfolgreicher umstellen und weiterentwickeln, je produktivere Erfahrungen zum Lernen und Lehren von Mathematik sie bei ihren eigenen fachlichen Lernprozessen während ihrer Ausbildung erworben haben bzw. in der Weiterbildung immer neu erwerben und je besser ihre fachwissenschaftliche Ausbildung auf das Curriculum abgestimmt ist (vgl. hierzu Müller/Steinbring/Wittmann 2002, Kap. 4. S. 62-85). Wie die Erfahrungen zeigen,

vermittelt eine Lehrerausbildung, die sich an der Ausbildung für mathematische Spezialisten orientiert, nicht den wissenschaftlichen Hintergrund für den Mathematikunterricht an allgemein bildenden Schulen.

Zielsetzung des Buches

Der vorliegende Band, der erste einer Reihe „Elementarmathematik als Prozess“, soll die oben geforderten produktiven Erfahrungen ermöglichen. Im Hinblick auf die beruflichen Anforderungen an Lehrerinnen und Lehrer wurde er in besonderer Weise konzipiert: Arithmetik soll als Prozess erfahren und unterrichtsrelevantes Fachwissen im Prozess erworben werden.

Im Mittelpunkt des Buches steht daher die Auseinandersetzung mit problemhaltigen arithmetischen Situationen: Eine solche Situation muss zuerst in der Sprache der Arithmetik erfasst werden („Mathematisieren“). Dann kann man versuchen, Muster zu entdecken („Explorieren“) und diese soweit wie möglich zu begründen („Argumentieren“). Schließlich müssen die gewonnenen Einsichten möglichst verständlich aufgeschrieben werden („Formulieren“).

Wenn die Mathematik als poliertes Fertigprodukt gelehrt wird, entsteht nolens volens der Eindruck, mathematische Erkenntnisse seien an glatte, fehlerlose, logisch geordnete Denkoperationen gebunden. Für das Lehren und Lernen von Mathematik hat dieser Eindruck fatale Folgen. Wer kann schon auf Anhieb „glatt, fehlerlos und logisch geordnet“ mathematisch denken? Es ist daher kein Wunder, dass sich die meisten Lernenden die Fähigkeit zum mathematischen Denken absprechen, eigene Lernanstrengungen einstellen und sich auf die Rezeption und Reproduktion vorgemachter Rezepte beschränken. Die Rituale des belehrenden Unterrichts wirken sich hierbei noch verstärkend aus. Zu welchen Ergebnissen das führt, ist heute offenkundig.

Die Reform des Mathematikunterrichts und der Lehrerbildung kann nur gelingen, wenn in Unterricht und Studium deutlich gemacht wird, dass die Prozesse der mathematischen Erkenntnisgewinnung zum größten Teil gerade nicht glatt verlaufen, sondern mit Fehlern behaftet und brüchig sind, und zwar auch bei den professionellen Mathematikern (die sich natürlich auch mit entsprechend schwierigeren Problemen befassen). Es kann unter Umständen lange dauern, bis man bei der Untersuchung eines Problems eine Idee hat, erfolgversprechende Ideen erweisen sich oft als fehlerhaft oder gar falsch, Muster, die man entdeckt zu haben glaubt, können nicht nur durch weitere positive Beispiele bestärkt, sondern auch durch Gegenbeispiele widerlegt werden, und man muss dann seinen Ansatz revidieren. Besonders schwer kann es sein, Begründungen zu finden. In manchen Fällen gelingt dies auch nach langer Mühe nicht. Auch die abschließende Formulierung mathematischer Prozesse und Erkenntnisse hat ihre eigenen Schwierigkeiten. Mehrfaches Überarbeiten und Verbessern von Entwürfen ist die Regel, nicht die Ausnahme.

Das Lernen von Mathematik besteht also seinem Wesen nach im produktiven Umgang mit diesen Schwierigkeiten, nicht in der Reproduktion fix und fertig vorgegebener fehlerloser Routinen. Man muss sich bewusst machen, dass die geistigen Kräfte nur in der Auseinandersetzung mit „Gegen-ständen“ wachsen und wachsen können: Im Laufe der Auseinandersetzung mit einem Problem erzielt man kleinere oder größere Fortschritte, der anfängliche Nebel lichtet sich allmählich, beim Testen an Beispielen

erkennt man Fehler und verbessert sie, man erzielt das eine oder andere Teilergebnis, findet gute Formulierungen, usw. Ein besonderes Erlebnis ist es, wenn nach längerer erfolgloser Beschäftigung mit einem Problem der Knoten platzt und man einen Sachverhalt, bei dem man längere Zeit im Dunkeln getappt ist, plötzlich versteht. Die Präsentation von Mathematik als fertiges Gebäude unterbindet solche Erfahrungen und betrügt die Lernenden gerade um das, worauf es beim Lernen ankommt. Es ist nichts als Augenwischerei, wenn diese Form des Lehre als „zeitsparend" und „effektiv" verteidigt wird.
Der richtige Weg zum gründlichen Erlernen eines Stoffgebietes, wie er in „Elementarmathematik als Prozess" verfolgt wird, besteht daher darin, den Lernenden zunächst eine gut strukturierte Sequenzen problemhaltiger Situationen anzubieten, an denen sie ausgiebige Erfahrungen mit mathematischen Prozessen sammeln können, insbesondere auch Erfahrungen mit scheinbar erfolglosen Anläufen sowie mit der konstruktiven Aufarbeitung von Mängeln und Fehlern. Erst auf einer zweiten Ebene macht es Sinn, aufbauend auf diese Erfahrungen zu einer systematischen Ordnung des Stoffes überzugehen. Dies ist dann aber auch notwendig, denn die Systematisierung ist ebenfalls ein Wesensmerkmal der Mathematik.
Mit der Absage an formale Darstellungen im vorliegenden Buch ist auch eine bewusste Absage an übertriebene Exaktheitsansprüche verbunden, die im Zeitalter der „Neuen Mathematik" in Mode gekommen sind, weil man Klarheit zu Unrecht mit formaler Präzision gleichgesetzt hat. Ein Verständnis für Präzision lässt sich nur in einem langfristig angelegten Prozess des Präzisierens entwickeln, nicht durch formale Setzungen von außen. Lernende verstehen Begriffe am besten, wenn sie mit ihnen in sinnvollen Zusammenhängen arbeiten. Wie z. B. Gian-Carlo Rota (1996, 48) sehr schön ausführt, sind daher Beschreibungen von Begriffen in einer kontextbezogenen Sprache wichtiger als Definitionen, auch wenn formalistische Pedanten das nicht wahrhaben wollen oder wahrhaben können.

Wir wissen nicht, welche Erfahrungen Sie beim Lernen und Lehren von Mathematik bisher gemacht und welche Gewohnheiten Sie dabei erworben haben. Möglicherweise stehen Sie dem in diesem Buch verfolgten Ansatz nicht nur mit Interesse, sondern auch mit einer gewissen Skepsis gegenüber. Wenn Sie sich als angehende oder praktizierende Lehrerinnen und Lehrer auf die Auseinandersetzung mit den problemhaltigen Situationen einlassen, die wir Ihnen in diesem Buch anbieten, werden Sie aber schnell feststellen, dass eigenaktives Lernen viel effektiver ist als rezeptives Lernen, gerade weil es keinen glatten Verlauf nimmt, und dass Sie dabei viel fundierteres Berufswissen erwerben. Folgende Tatsachen kommen hierbei zum Tragen:

1. Ihre mathematischen Fähigkeiten werden auch dann gestärkt, wenn Sie sich scheinbar „erfolglos" mit einem Problem befassen. Denken Sie z. B. an einen Turner, der eine bestimmte Übung vielleicht monatelang trainiert ohne sie zu beherrschen, dabei aber nichtsdestoweniger seine Beweglichkeit, seine Kraft und sein Körpergefühl steigert. Genauso ist es in der Mathematik, wo dies leider viel zu wenig beachtet wird, weil Lernende und Lehrende sich zu sehr auf kurzfristige Erfolge und glatte Lernprozesse versteifen und Phasen der Unsicherheit, die das Herzstück des Lernens sind, für unproduktiv halten.
2. Die mathematische Forschung lebt davon, dass gute mathematische Probleme immer einen experimentellen Zugang erlauben und nie isoliert auftreten: Die

Forscher können immer Beispielmaterial produzieren und daran Ideen entwickeln, leichtere Teilprobleme abspalten oder die Bedingungen so variieren, dass leichter zugängliche verwandte Probleme entstehen. Dieses Vorgehen steht auch Ihnen in einem kleineren Rahmen offen. Beispiele zum Erforschen von Mustern und zum Überprüfen von Vermutungen können Sie sich grundsätzlich immer verschaffen. Im Umkreis eines Problems, das Ihnen zunächst als zu schwierig erscheint, können Sie auch immer irgendein Problem formulieren, das für Sie leichter zugänglich ist und bei dem sie zumindest Teilerfolge und Teileinsichten erzielen können. In der Einleitung zu Abschnitt 1.7 werden heuristische Strategien (Heurismen) erklärt, die dabei hilfreich sind.

3. Umfassende Erfahrungen von Lehrenden mit eigenen Lernprozessen bilden die Grundvoraussetzung für die Erforschung und für die Organisation von Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern. Damit Sie auch die sozialen Aspekte des Lehrens und Lernens gründlich kennen lernen, empfehlen wir Ihnen nachdrücklich sich in Arbeitsgruppen zu organisieren und zu engagieren. In der Gruppe können Sie im Austausch mit den anderen Mitgliedern nicht nur Ihre fachlichen Fortschritte steigern, sondern auch Ihre kommunikativen Fähigkeiten als Lehrerin und Lehrer entwickeln. Sowohl was die individuelle als auch was die soziale Seite von Lernprozessen anbelangt, sind die nicht glatten Verläufe besonders interessant. Je besser Sie sich darin auskennen, desto besser können sie sich auch als Lehrerin und Lehrer in Lernende, die Schwierigkeiten haben, hinein versetzen, und desto besser können Sie mit den unvermeidlichen Brüchen in der Kommunikation umgehen. Alles, was bei echten Lernprozessen in der Schule vorkommt, findet sich bei echten Lernprozessen im Studium wieder. John Dewey hat daher das eigene Lernen von Lehrerstudenten in der Gruppe zu Recht als „Quasi-Praxis“ für die Unterrichtstätigkeit bezeichnet. In das Buch sind Dokumente eingestreut, die Ihnen ein Gefühl für die Denkprozesse von Schülerinnen und Schüler im Umgang mit arithmetischen Aufgabenstellungen geben sollen.
4. In der Auseinandersetzung mit problemhaltigen Situationen können Sie zumindest implizit fachdidaktisches Wissen erwerben. Z. B. sind die oben im mathematischen Erkenntnisprozess identifizierten Aktivitäten „Mathematisieren“, „Explorieren“, „Argumentieren“ und „Formulieren“ im Wesentlichen gerade die von Heinrich Winter fixierten *stufenübergreifenden allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts*. Weiter wird der Transfer auf den Mathematikunterricht durch die Auswahl schulrelevanter Themen der Arithmetik gewährleistet. Aus vielen der zur Bearbeitung angebotenen Probleme lassen sich Teilprobleme abspalten, die unmittelbar für den Unterricht geeignet sind. Die Art der Auseinandersetzung mit den Problemen ist ohnehin übertragbar.
5. Es ist klar, dass der Erwerb elementarmathematischer Kompetenzen nach dem Konzept des Buches eine gute Grundlage für fachdidaktische Studien bietet.

Aufbau des Buches

Die vier Kapitel des Buches haben der Zielsetzung des Buches entsprechend unterschiedliche Funktionen:
Im ersten Kapitel sollen Sie eigene Erfahrungen mit mathematischen Lernprozessen sammeln. Alle schulrelevanten Bereiche der Arithmetik werden dabei thematisiert: Rechnen in Stellenwertsystemen, Folgen und vollständige Induktion, arithmetische

Reihen, Zahlentheorie, Kombinatorik, Brüche sowie Anwendungen der Arithmetik. In jedem der sieben Abschnitte werden Ihnen je 10 besonders ausgewählte Probleme zur Bearbeitung angeboten. Der notwendige mathematische Hintergrund wird jeweils soweit entwickelt, wie es zum Verständnis der Probleme nötig ist. Direkte Lösungshinweise werden nur im Ausnahmefall gegeben. Es werden aber Werkzeuge eingeführt, die Sie zur Lösung heranziehen können, und z. T. wird die Handhabung dieser Werkzeuge an verwandten Problemen illustriert. Eine Schlüsselrolle spielen dabei bestimmte nichtformale Darstellungen mathematischer Objekte. Im Falle der elementaren Arithmetik sind dies insbesondere der Zahlenstrahl, Punktmuster, Tabellen und Diagramme. Solche Darstellungen sind für die Mathematik als „quasi-empirischer" Wissenschaft charakteristisch. Sie fungieren als Experimentierfelder, auf denen operiert werden kann. Dabei ergeben sich nicht nur Vermutungen, sondern man kann, wenn man die Wirkung von Operationen erkannt hat, stichhaltige Beweise führen („operative Beweise"). Die in bewusster Absetzung von mathematischen Formalismen benutzte *problemorientierte Sprache* ist aussagekräftig und stellt genau die Sprache dar, die auch für die Kommunikation mit Schülerinnen und Schülern benötigt wird.
Im Abschnitt 1.7 wird das Modellbilden besonders thematisiert. Anwendungen der Arithmetik finden sich aber auch in anderen Abschnitten.

Im zweiten Kapitel können Sie anhand ausgewählter Dokumente wichtige Stationen der geschichtlichen Entwicklung der Arithmetik nachempfinden. Es wird dabei deutlich, wie anfänglich konkrete und bildliche Darstellungen der Zahlen und des Rechnens (Zahlbilder, Rechensteine) im Lauf der Zeit immer mehr durch symbolische Darstellungen und Begriffssysteme überlagert und ersetzt wurden – ein Faktum, das für die psychologische Entwicklung des Zahlbegriffs von fundamentaler Bedeutung ist. Zur aktiven Auseinandersetzung mit den historischen Dokumenten dienen wiederum 10 Aufgaben, zur Vertiefung weitere 10 Aufgaben am Ende des Kapitels.

In den sieben Abschnitten des dritten Kapitels werden die Themen des ersten Kapitels erneut aufgegriffen und in eine systematische Form gebracht. Dieses Kapitel soll Sie anregen Ihre bei der Bearbeitung von Kapitel 1 gewonnenen Erfahrungen zu ordnen. Sie erhalten dabei eine kompakte Übersicht über schulrelevante arithmetische Theorien. Jeder Abschnitt endet mit 10 Aufgaben, an denen Sie Ihr Verständnis des jeweiligen Themas testen und vertiefen können.

Als eine Art Gegenstück zum zweiten Kapitel, geht es im abschließenden vierten Kapitel um die epistemologischen und logischen Wurzeln der Arithmetik. Die Epistemologie befasst sich mit der Entwicklung, Darstellung und der Struktur des Wissens in einem sehr umfassenden Sinn, die Logik mit seiner begrifflichen Fundierung. Im Abschnitt 4.1 wird eine epistemologische Begründung der Rechengesetze der Arithmetik gegeben, die an die genetische Epistemologie von Jean Piaget anschließt und für den Mathematikunterricht besonders aussagekräftig ist. Der Abschnitt 4.2 liefert eine konstruktive Begründung, bei der die vollständige Induktion eine tragende Rolle spielt. Der letzte Abschnitt 4.3 befasst sich mit den Grundlagen der Mathematik im üblichen Sinn, nämlich mit der logischen Analyse des Anzahlbegriffs im Rahmen der „Mengenlehre". Ziel dabei ist es, den Kontrast zwischen endlichen Mengen und verschieden „mächtigen" *un*endlichen Mengen deutlich werden zu lassen. Auch dieses Kapitel endet mit 10 Aufgaben zur Vertiefung.

Nutzung des Buches

Die Arithmetik ist ein klassisches Gebiet der Mathematik, das im Grund- und Hauptstudium von Lehramtsstudiengängen eine prominente Rolle spielt und in den Curricula von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II breiten Raum einnimmt. Aufgrund unserer Erfahrungen in der Lehreraus- und -fortbildung glauben wir, dass sich das Buch als Referenztext für aktiv-entdeckendes Lernen im Studium und in der schulischen Praxis eignet. Auch Kenner der Arithmetik dürfte es reizen, dieses Gebiet einmal von einer anderen Seite aus zu betrachten.

Teile des Buches sind aus dem Bemühen entstanden, auch in großen „Lehrveranstaltungen“ aktives Lernen der Studierenden anzuregen. Bei der O-Skript/A-Skript-Methode z. B. (Wittmann 2002) – die Abkürzungen „O“ und „A“ stehen dabei für „Organisation“ und „Aktivität“ (vgl. das Zitat im Vorwort) – geschieht dies in folgender Weise: In der ersten Hälfte eines Semesters werden in der wöchentlichen „Vorlesung“ Probleme aus Kapitel 1 vorgestellt und erklärt, die von den Studierenden selbstständig auszuarbeiten sind. In den wöchentlichen „Übungen“ können sie sich dabei mit den Übungsleitern und den anderen Studierenden austauschen. Es wird deutlich unterschieden zwischen dem sogenannten „O-Skript“ des Dozenten, das lückenhaft und skizzenartig ist, und den von den Studierenden angefertigten persönlichen „A-Skripten“, in denen die Bearbeitung der gestellten Probleme unter Einbeziehung des O-Skripts in einem sauberen Text dokumentiert wird. In den „Vorlesungen“ werden natürlich auch Anregungen zur Abfassung des „A-Skripts“ gegeben. In der zweiten Hälfte des Semesters werden in den Vorlesungen dieselben Themen entsprechend Kapitel 3 noch einmal systematisch behandelt. Die Studierenden können dabei auf ihre Erfahrungen und Erkenntnisse bei der Erstellung des A-Skripts zurückgreifen und nehmen die Theorieausschnitte mit viel mehr Verständnis auf, als wenn diese ohne Vorlauf direkt behandelt werden.
Natürlich sind die im Buch behandelten arithmetischen Themenbereiche bzw. Erschließungsaufgaben gegen andere austauschbar. Jede(r) Dozent(in) kann ihre/seine Erfahrungen und Vorlieben einbringen.

Die wichtigste Ausrüstung für Sie als aktive Leserin oder als aktiven Leser sind natürlich Papier und Bleistift: Kapitel 1 steht und fällt mit der eigenen gründlichen Bearbeitung: *Die detaillierte Ausarbeitung prägnanter Beispiele ist der beste Weg Lösungsansätze zu finden, Zusammenhänge zu verstehen und Fehler in Überlegungen zu entdecken.* ***Das dafür nötige Knowhow zu erwerben muss daher das erste Ziel sein, das Sie sich im Studium setzen.*** *Je mehr Energie Sie für dieses Ziel investieren, desto schneller werden Sie im Studium Boden unter die Füße bekommen und desto früher können Sie Ihr Knowhow nutzen, insbesondere auch bei schriftlichen und mündlichen Leistungstests.*
In Kapitel 1 werden Sie systematisch angeleitet, wie Sie sich bei einem gegebenen Problem Datenmaterial verschaffen und mit ihm operieren können. In Kapitel 3 dagegen sind Beispiele nur zu einem geringen Teil in den Text integriert. Jetzt müssen Sie sich

im Gegensatz zu Kapitel 1 das zum Verständnis nötige Material während der Durcharbeitung selbst verschaffen:

- Wenn ein Begriff durch eine Definition eingeführt wird, ist es *Ihre Aufgabe*, selbst „hinreichend viele“ Beispiele für den eingeführten Begriff zu finden.
- Wenn ein Satz formuliert und bewiesen wird, ist es *Ihre Aufgabe*, sich die Aussage des Satzes und die Argumentation an „hinreichend vielen“ prägnanten Beispielen klar zu machen.
- Wenn ein Verfahren allgemein erklärt wird, ist es *Ihre Aufgabe*, „hinreichend viele“ konkrete Beispiele durchzurechnen.

Maßstab dafür, was im Einzelfall „hinreichend viel“ bedeutet, ist immer Ihr eigenes Verständnis. Natürlich sollten Sie auch die Aufgaben am Ende jedes Abschnitts von Kapitel 3 in Form geschlossener Texte bearbeiten (was gleichzeitig die beste Vorbereitung für jede Form schriftlicher Leistungsnachweise ist). Da der Weg bei der Bearbeitung der Aufgaben wichtiger ist als das Ziel, verzichten wir bewusst auf Lösungshinweise. Diese würden die Beschäftigung mit den Aufgaben nur einengen.
Sehr sinnvoll ist auch die Nutzung des Computers. Wir beschränken uns im Buch auf Taballen(kalkulations)programme (wie z.B. Excel), da diese allgemein verfügbar, schnell zu erlernen und einfach zu handhaben sind. Außerdem unterstützen Tabellenprogramme die von uns bevorzugten Darstellungsformen am besten. Leserinnen und Leser, die noch keine Erfahrung mit Tabellenprogrammen haben, finden eine für unsere Zwecke ausreichende kurze und prägnante Einführung im Anhang des Buches.

Entstehung des Buches und weitere Pläne

Das Buch ist im Laufe einer mehrjährigen Zusammenarbeit innerhalb eines relativ großen Autorenteams entstanden. Dabei haben immer zwei (in einem Fall drei) Autor(inn)en zusammengearbeitet, auch wenn einige Abschnitte letztlich nur von einer Autorin oder einem Autor verantwortet werden. Die korrespondierenden Abschnitte in den Kapiteln 1 und 3 wurden jeweils von den gleichen Teams bearbeitet, um die Schlüssigkeit der sieben großen Themen zu gewährleisten. Die Übereinstimmung in Grundpositionen des Lehrens und Lernens war im Team von Anfang an gegeben. Die Herausgeber sehen es als Bereicherung an, dass die einzelnen Abschnitte unterschiedliche persönliche Stile repräsentieren und haben daher von einer stilistischen Glättung abgesehen. Vorgenommen wurden nur marginale Anpassungen.

Es ist geplant „Arithmetik als Prozess“ zu einer Reihe „Elementarmathematik als Prozess“ auszubauen, die alle schulrelevanten Gebiete der Elementarmathematik umfasst. Die Herausgeber würden sich daher freuen mit Kolleginnen und Kollegen in Kontakt zu treten, die sich um eine entsprechende Reform der mathematischen Teile der Lehrerbildung bemühen und an einer Mitarbeit nach dem Modell von „Arithmetik als Prozess“ interessiert sind. Auch kritische Rückmeldungen zu dem Konzept sind ausdrücklich erwünscht: „Elementarmathematik als Prozess“ ist selbst ein Prozess.

Unser besonderer Dank gilt den Herren Hans Humenberger und Wolfgang Kroll, die das Manuskript gelesen und eine Reihe substanzieller Verbesserungsvorschläge

gemacht haben, sowie Frau Anja Fresen, die insbesondere bei der Erstellung und Koordination der Endfassungen der Manuskripte immer die Übersicht behalten hat.

Literatur

Devlin, K.: Muster der Mathematik. Heidelberg/Berlin: Spektrum 1995

Müller, G.N., Steinbring, H. und Wittmann E.Ch.: Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht. Velber: Kallmeyer 2002

Rota, G.-C.: Indiscrete Thoughts. Basel: Birkhäuser 1996

Wittmann, E.Ch.: The Alpha and Omega of Teacher Education: Organizing Mathematical Activities. In Holton, D. (ed.): The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer 2002, 539-552

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1989. (Neubearbeitung in der Kallmeyer'schen Verlagsbuchhandlung Seelze/Velber 2004)