Die Grundlegung und Vorbereitung geometrischen Denkens in der Grundschule

(Entwurf einer Geometrischen Propädeutik)

von Heinrich Bauersfeld

1. Anlaß und Begründung

In den Richtlinien und „Bildungsplänen“ fast aller Bundesländer wird der systematische Raumlehreunterricht — besser: Geometrieunterricht — auf das 5.—8. (9.) Schuljahr festgelegt. Kann dieser Unterricht voraussetzungslos beginnen? Diese Frage dürfte von niemandem ernsthaft bejaht werden. Dann muß jedoch weitergefragt werden: Von welcher Art sind diese „Voraussetzungen“? Wie erwirbt sie das Kind und wann ggf. erwirbt es sie? „Wachsen“ diese Voraussetzungen mit der gleichen Sicherheit und Zwangsläufigkeit heran, wie eine Pflanze nach einem vorbestimmten Bauplan wächst, so daß sie in einem bestimmten Alter zuverlässig zur Verfügung stehen? Oder bedarf das Kind dazu der Anregung und Ausbildung, d. h. werden sie in einem ggf. langfristigen Bildungsprozeß erworben?

Für das 5. Schuljahr wird zumeist u. a. die „Behandlung von Würfel und Quadrat“ gefordert. Im Umgang mit konkretem Material sollen die Kinder dabei zu Aussagen geführt werden, wie: „Der Würfel hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen.“ Aber auch: „Das Quadrat hat 4 gleiche Seiten und 4 rechte Winkel“; „die beiden Diagonalen und die beiden Mittellinien sind Faltachsen“; „die Diagonalen (Mittellinien) halbieren sich gegenseitig und sind gleich lang“ usw.

Wie kann das Kind den Begriff „Kante“ auffassen, wenn es nicht zuvor ausgedehnte Erfahrungen mit Eckigem, Kantigem, Spitzem usw. erworben hat, die Qualitäten von dem je bestimmten konkreten Gegenstand ablösen und übertragen, sie unterscheiden und sprachlich treffend benennen kann? Kann dies in den wenigen sogenannten Einführungsstunden und am Würfel allein zureichend gelingen? Zudem vertreten

Wörter wie „Ecke“, „Kante“, „Seite“, „Mitte“, „Länge“, „Fläche“ usw. in der Umgangssprache je nach dem Sachzusammenhang sehr verschiedene Inhalte. Man vergleiche:

> Das Spielzeug „liegt in der Ecke“; er ist „eben um die Ecke“ gegangen; Herr Meyer muß „in dieser Ecke“ (Ortsteil) wohnen; jemanden „um die Ecke bringen“; — der Würfel hat 8 Ecken.
> Oder: Ein Buch hat 300 „Seiten“; eine Entscheidung kann zwei „Seiten“ haben; ein Haus hat eine „Vorderseite“, ein Auto eine „Unterseite“ — und nun besitzt unversehens ein Quadrat 4 gleichlange (!) „Seiten“!
> Oder: Etwas ereignet sich „mitten“ auf der Straße oder „mitten“ in einer Menschenmenge; wir werden „mitten“ im Gespräch gestört; jemand steckt „mittendrin“ (im Unglück z. B.) — und nun verläuft eine „Mittellinie“ von der „Mitte“ einer Seite zur „Mitte“ der gegenüberliegenden Seite!

Wann werden diese Unterschiede geklärt? Sind sie allen Kindern in auch nur annähernd vergleichbarer Weise einsichtig?

Wie soll ein Kind die auf den ersten Blick verwirrende Fülle von Würfelkanten zählen, wenn es sie nicht ordnen und übersichtlich einteilen kann, etwa in vordere und hintere, obere und untere sowie linke und rechte? Es nimmt lange Zeit in Anspruch, bis das Kind lernt, rechts und links am eigenen Körper sicher zu unterscheiden, und selbst am Ende der Grundschulzeit haben noch nicht alle Kinder dieses Stadium erreicht. Wir benutzen jedoch die Links-Rechts-Beziehung nicht nur im körpereigenen Bezugssystem, sondern auch vielfach in abgeleiteten Systemen (z. B. linker Kotflügel am Auto, linkes Flußufer, rechter Ärmel an Kleidungsstücken, Rechtsverkehr usw.). Vollzieht jedes Kind diese Objektivierung der Ordnungsbegriffe (Beweglichkeit des Bezugssystems) gleichsam von selbst oder bedarf es dazu einiger Hilfen, wenn nicht eines geleiteten Lernprozesses? Welche Inhalte verbindet ein Kind des 5. Schuljahres mit der Bezeichnung „gegenüber“, und welche davon fundieren etwa die Aussage, daß in einem Viereck „gegenüberliegende“ Seiten gleichlang sind? In der Oberstufe der Volksschule bleiben nicht wenigen Kindern geometrische Aussagen allein deshalb unfaßlich, weil die Kinder Begriffe wie „benachbart“, „gegenüber“ oder „zugehörig“ nicht hinreichend objektiviert oder neutralisiert haben.

Wie soll ein Kind die quadratischen Flächen eines Würfels als eine besondere Gestalt, einen besonderen „Formtypus“ auffassen und erkennen, wenn es sie nicht mit anderen Gestalten wie Rechteck, Dreieck, Viereck, Kreis usw. vergleichen und davon unterscheiden kann? Ist nicht ein derartiges gestalthaftes Unterscheiden und Vergleichen die Voraussetzung für das spätere Ablösen und Erkennen der abstrakten Idealform Quadrat? Wie soll ein Kind überhaupt den Inhalt „Fläche" auffassen, wenn es nicht über Qualitäten wie „rauh", „glatt", „geknickt", „gewellt", „eben" usw. verfügt? (Für das Wort „eben" haben bereits Petermann und Hagge — siehe Lit. 5, S. 30 — 15 verschiedene Inhalte aufgewiesen, neben dem rein geometrischen.) Liegt schließlich das Besondere, Auffällige vieler Formtypen nicht in ihrer Symmetrie, so daß das Entdecken gerade des geometrisch Besonderen vielfältige Erfahrungen im Umgang mit Symmetrischem und ihre Verdichtung und Abstraktion bis zur eindeutigen sprachlichen Fixierung voraussetzt? An welcher Stelle nimmt sich der konventionelle Unterricht dessen an?

Die Fragen und Beispiele ließen sich beliebig vermehren, doch dürfte das Wenige schon genügen, um die nachstehenden Thesen zu motivieren:

1.1. Die skizzierten Voraussetzungen „wachsen" nicht, um dann wie selbstverständlich zur Verfügung zu stehen.

1.2. Ihr Aufbau kann auch nicht zufälligen und damit unkontrollierten Lernprozessen des Kindes überlassen bleiben.

1.3. Der im 5. Schuljahr beginnende systematische Geometrieunterricht ist an diese Voraussetzungen gebunden, kann sie jedoch nicht mehr in der erforderlichen Breite schaffen.

1.4. Eigenart und Grundlagencharakter der betreffenden Inhalte erfordern den zugehörigen Aufbau — Geometrische Propädeutik — in der Grundschule.

Nicht selten reicht in einer sogenannten Einführungsstunde der Spannungsbogen des Umgangs mit geometrischen Inhalten (z. B. mit dem Quadrat) vom Handeln mit konkretem Material (z. B. Falten von Papierquadraten) bis zu Begriffserklärungen im Rahmen des soeben tätig Vollzogenen (z. B. Diagonale, Faltachse) und zu logischen Schlüssen mit Hilfe der soeben „geklärten" Begriffe (z. B.: Beim Falten längs einer Faltachse fallen entsprechende Seiten genau aufeinander, also sind sie gleichlang). Das heißt, innerhalb eines unbekannten komplizierten Sachgefüges wird das Kind in 45 Minuten von einfachen Tätigkeiten bis hin zu Formen artikulierten Denkens in Begriffen fortzuschreiten gezwungen. Rieckhoff hat diese gängige Unterrichtspraxis einmal treffend mit dem vergeblichen Bemühen eines Gärtners verglichen, „der in seinem

Treibhaus durch Abbrennen eines Blitzlichtes den Reifungsprozeß seiner Tomaten beschleunigen will" (siehe Lit. 6, S. 20). Das Ergebnis kann schwerlich etwas Besseres als ein betoniertes Verbalsystem sein, in dem wurzellose Worthülsen zu rein verbalen Beziehungsketten gegliedert und nur auf entsprechende Signale abrufbar sind, das jedoch keiner sinnvollen Anwendung oder Übertragung fähig ist und daher auch keinen Beitrag zum Aufbau eines beweglichen operativen Denkens leistet.

Die vorläufige Auswertung bisher unveröffentlichter Untersuchungen an rund 900 Kindern über die geometrische Begrifflichkeit 11—15jähriger Volksschüler unterstützt diese Kritik. Es ergab sich u. a., daß etwa jeder fünfte Schüler des 9. Volksschuljahres die Bezeichnung „Viereck", „Quadrat" und „Würfel" als Synonyma gebraucht und das Quadrat nicht als Fläche erkennt, d. h., für rund 20 % der Schüler waren fünf Jahre Geometrieunterricht ein bodenloses Bemühen.

2. AUFGABEN UND INHALTE

Demgegenüber hätte eine Geometrische Propädeutik in der Grundschule die *Präfiguration* gewisser grundlegender Begriffe und Relationen zu leisten. Es geht also dabei noch nicht um geometrische Begriffe und Aussagen selbst, sondern vielmehr um die Aufarbeitung der zugehörigen anschaulichen und sprachlichen Grundschichten und Vorformen dieser Inhalte bis hin zur Klärung ihres geometrischen Gehaltes und dessen bewußter Verfügbarkeit. Schwerpunktartig lassen sich vier Bereiche angeben, die diesem „Vorfeld" der Geometrie angehören:

2.1. *Der Bereich der Qualitätsbegriffe.* Hierzu gehören vor allem Formqualitäten wie: breit, dick, dünn, eben (auch als Lagequalität deutbar), eckig, gerade, geschlängelt, gewellt, gezackt, glatt, groß, hoch, kantig, klein, krumm, kurz, lang, niedrig, rauh, rund, schmal, spitz, stumpf usw. und Lagequalitäten wie: lotrecht, schief, schräg, steil, waagerecht usw.

Diese Bezeichnungen sind alle mehrdeutig, d. h., sie vertreten zum Teil sehr verschiedene Inhalte, und oft ist nicht einmal aus dem Kontext die Bedeutung eindeutig ableitbar. Im allgemeinen ist nur einer der verschiedenen Inhalte des Wortes geometrisch relevant. Daraus ergibt sich als Aufgabe einer Geometrischen Propädeutik, von Fall zu Fall die Mehrdeutigkeit ins Bewußtsein zu heben und dann den geometrischen Aspekt zu betonen, damit diese später wie selbstverständlich benutzten Qualitätsbegriffe (z. B. zur Beschreibung geometrischer Sachverhalte) hinreichend geklärt und präzisiert sind.

2.2. *Der Bereich der Ordnungsbeziehungen.* Hierzu gehören: dahinter, daneben, darüber, darunter, davor, dazwischen, links, rechts, oben, unten, vorn, hinten, benachbart, gegenüber, neben, zwischen, zugehörig usw.; im weiteren Sinne auch: kürzer, länger, breiter, höher, tiefer, kleiner, größer usw. und: in der Mitte, am Rande, an der Spitze usw.; sowie die entsprechenden Zusammensetzungen: oben links, vorn am Rande, schräg gegenüber usw.

Während die Qualitätsbegriffe „Eigenschaften" eines Gegenstandes betreffen, legen die Ordnungsbegriffe „Beziehungen" zwischen unterscheidbaren Gegenständen fest. Sie stellen damit die Grundlage der mathematischen Relationen dar, d. h., sie präfigurieren jene. Keine geometrische Aussage kann ohne Ordnungsbegriffe umschrieben und präzisiert werden, möglicherweise überhaupt keine Strukturaussage. Im genetischen Aufbau erscheinen alle Ordnungsbeziehungen zunächst als ichzentrierte und werden nur sehr allmählich objektiviert, d. h. auch auf nicht-körpereigene Systeme bezogen. Derartige Abstraktionen anzubahnen und die Ordnungsbegriffe beweglich und frei verfügbar, d. h. auf beliebige Systeme anwendbar zu machen, gehört ebenfalls zu den Aufgaben einer Geometrischen Propädeutik. Kurz: Während es bei den Qualitätsbegriffen insbesondere auf die Hervorhebung des geometrisch bedeutsamen Inhaltssektors ankommt, bedürfen die Ordnungsbegriffe der Objektivierung und Abstraktion.

2.3. *Der Bereich der Formtypen.* Hierzu gehören: Drachen, Dreieck, Kegel, Kreis, Kugel, Pyramide, Quadrat, Rechteck, Viereck, Zylinder usw., aber auch: Reihe (Gerade), Ecke, Bogen, Kante, Spitze, Linie usw.

Noch fern jeglicher geometrischer Definition und zumeist bereits im Vorschulalter werden diese Grundformen vom Kinde gestalthaft und kaum differenziert aufgefaßt und wiedererkannt. Jedoch wird die gleiche Bezeichnung von verschiedenen Kindern mit oft sehr verschiedenen Vorstellungsinhalten verbunden. Andererseits gebraucht dasselbe Kind nicht selten die Wörter Quadrat, Baustein, Würfel, Rechteck, Klotz und Viereck als synonyme Bezeichnungen für den gleichen Gegenstand, ebenso z. B. Kreis, Kringel, Rundes, Bogen usw. Daraus resultiert als weitere Aufgabe einer Geometrischen Propädeutik: Im Rahmen der altersstufengebundenen Möglichkeiten müssen die betreffenden Anschauungs- und Vorstellungsinhalte unterschieden, geordnet, vergleichend geklärt und angemessen bezeichnet werden, damit die später in der Hauptschule geforderte „Anstrengung des Begriffs" überhaupt ermöglicht wird.

2.4. *Der Bereich des Symmetrischen.* Hierzu gehören: gleich, gleichmäßig, doppelt, halbiert, Mitte, Mittelpunkt (Drehung), Spiegelbild, Achse, Halbierungslinie usw.

Möglicherweise wird die Bedeutung der Symmetrie hinsichtlich unseres räumlichen Auffassungs- und Gliederungsvermögens in der Schule unterschätzt. Schon das Kleinkind baut und zeichnet keineswegs zufällig symmetrische Gebilde. „Gleichmäßige", „ebenmäßige" Gestalten und Formen werden oft — im Gegensatz zu manchen Kunstrichtungen — bevorzugt, vielleicht auch deshalb, weil die „Gesetze des Sehens" (vgl. W. Metzger, Frankfurt 1953) u. a. von Symmetriegesetzen bestimmt sind. Im Rechenunterricht z. B. werden Symmetrieeigenschaften zur übersichtlichen Darstellung und Gliederung von Mengen (sog. Gruppenbilder u. a.) benutzt. Schließlich ist ein „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff" (vgl. F. Bachmann, Berlin 1959) möglich, und die im Symmetriebegriff gründende Abbildungsauffassung ermöglicht einen methodisch günstigeren Aufbau des Geometrieunterrichts (vgl. Lit. 1 z. B.) als die euklidische Auffassung. Angesichts dieser fundamentalen Bedeutung der Symmetrie können und sollten bereits in der Grundschule (Geometrische Propädeutik) — von der unmittelbaren Erfahrungswelt des Kindes ausgehend — elementare Symmetrie-Sachverhalte entdeckt, hervorgehoben, konturiert und sprachlich gefaßt werden. Im Zusammenhang mit den Bereichen der Ordnungsbeziehungen und der Formtypen ergeben sich hier vielfältige Möglichkeiten zur Vorbereitung streng geometrischer Inhalte.

Selbstverständlich kann mit der vorstehenden Aufzählung kein Anspruch auf Vollständigkeit verbunden werden. Überdies sind dabei alle diejenigen geometrischen Inhalte außer acht gelassen, die bereits im üblichen Grundschulunterricht mehr oder minder zureichend eingeplant sind, so z. B. das Thema Maße und Messen. Der *Ort* der vorgeschlagenen Geometrischen Propädeutik mag im allgemeinen der Rechenunterricht sein. Doch wird der geschickte Lehrer eher tragfähige Motivationen aufnehmen, die sich im Sachunterricht, im muttersprachlichen Bereich, in der Heimatkunde usw. anbieten, um von Fall zu Fall kurze Übungen einzuschalten.

3. METHODE UND UNTERRICHTSPRAXIS

Die Forderung nach einer geplanten Vorbereitung und Grundlegung der Raumlehre bzw. Geometrie in der Grundschule und teils schon in der Vorschulzeit ist keineswegs neu. Aus der umgreifenden Idee der „Lebenseinigung" abgeleitet, finden sich bereits bei Fröbel (u. a. in seiner „Theorie des Spiels") zahlreich in diesem Sinne deutbar Anweisungen, Spiele und Aufgaben. Doch haben spätere Ansätze und Versuche, so von Müller-Nitzsche-Queisser-Förster, Petermann-Hagge, Falk u. a. (siehe Lit. 2—5 und 8) den Grundschulunterricht offenbar kaum beeinflußt. Im Sachlichen ungleich anspruchsvollere Bemühungen sind in der DDR nachweisbar, ebenso in den USA und Kanada (siehe Lit. 7 und 10).

Es kann an dieser Stelle weder ein Aufriß der Geschichte einer Geometrischen Propädeutik versucht noch können die Gründe der weitgehenden Wirkungslosigkeit dieser Ansätze bei uns näher untersucht werden. Möglicherweise darf man eine Ursache an derselben Stelle vermuten, wie bei manchen „schwierigen" Abschnitten des Rechenunterrichtes auch: Es ist gelegentlich leichter, didaktische Entscheidungen und Theorien zu konstruieren, als die jenen angemessene methodische Ausprägung für die Unterrichtspraxis zu finden. Daher sollen im folgenden einige in 3. und 4. Klassen eingehend erprobte Aufgabenbeispiele (siehe auch Lit. 9) zur Anregung und Weiterführung mitgeteilt werden. Es sind teils Abwandlungen bekannter Aufgaben, teils aber auch neue Aufgabenformen.

3.1. Der Lehrer stellt einige sehr verschieden geformte Vasen gut sichtbar nebeneinander auf den Tisch. Jedes Kind sucht sich eine Vase aus, jedoch ohne sie wegzunehmen oder zu verraten, welche es ist. Dann beschreiben nacheinander einige Kinder „ihre" Vase möglichst genau, und die übrigen Kinder müssen herausfinden, welche Vase gemeint ist.

Die Vasen dürfen nicht allzu verschieden gefärbt sein oder andere auffallende Merkmale (wie ausgeschlagene Ränder usw.) aufweisen, damit nicht ein Merkmal allein zur Kennzeichnung genügt: „Meine Vase ist rot!" o. ä. Bei einem differenzierten Vasensortiment erweist sich dieses Spiel als eine gute Übung zu den Qualitätsbegriffen (z. B. dick/dünn, groß/klein, schlank/bauchig, rund/eckig, breit/hoch usw.) und den Ordnungsbegriffen (z. B. oben/unten, links/rechts usw.), insbesondere dann, wenn die Fehler von den Kindern eingehend diskutiert werden (gegenseitige Korrektur). Das gleiche Spiel kann mit Flaschen, Blechdosen usw. aus-

geführt werden. Bei einiger Übung kann man die Kinder die Kennzeichen „ihres" Gegenstandes auch aufschreiben und vorlesen lassen.

3.2. Der Lehrer beschreibt einen den Kindern gut bekannten Gegenstand. Die Kinder sollen herausfinden, welcher Gegenstand gemeint ist. Zum Beispiel: „Ich kenne einen Gegenstand, der ist überall gleichmäßig rund" (Ball, Kugel usw.); „. . . , der ist groß, eben und rechteckig" (Wandtafel usw.); „. . . , der hat acht Ecken" (Schrank, Karton, Kiste usw.).

Nach wenigen Beispielen drängen die Kinder danach, selbst Aufgaben zu diesem „Ich-kenne-einen-Gegenstand"-Spiel zu stellen. Wichtig ist auch hierbei die Klärung von offenbar werdenden Fehlvorstellungen und -bezeichnungen (Qualitäts- und Ordnungsbegriffe, Formtypen).

3.3. Vor der Stunde legt der Lehrer einige einfache Gegenstände, z. B. Konservendose, Ball, Holzkasten, leerer Blumentopf und Handfeger, auf seinen Tisch und deckt sie mit einem Tischtuch oder einer dünnen Wolldecke zu, so daß die Kinder nicht sehen können, was darunter verborgen ist. Ein Kind kommt nach vorn und darf einen der Gegenstände eingehend durch das Tuch hindurch betasten. Dann beschreibt das Kind den Gegenstand möglichst genau (wobei die Hände auf den Rücken gelegt werden sollten, damit nicht gestikuliert wird). Die übrigen Kinder müssen nach der Beschreibung „raten", was es für ein Gegenstand ist. Ggf. dürfen weitere Kinder tasten und die Beschreibung korrigieren oder ergänzen.

Die wenigen Beispiele mögen zunächst den Eindruck hervorrufen, als sollte ausschließlich Phantasie geweckt, Vorstellung geklärt und sprachlicher Ausdruck geschärft werden. Selbstverständlich sind derartige Beanspruchungen nur möglich, wenn einfachere Aufgaben vorausgegangen sind (ggf. im 1. und 2. Schuljahr), wie das Kneten verschiedener Vasen, Flaschen usw. aus Plastilin und ihre anschließende Beschreibung, die Aufarbeitung bestimmter Wortfelder (z. B. „Was ist alles dick?", hoch, schmal, rund) usw.

3.4. Der Lehrer stellt sich vor die Klasse und fragt: „Wo ist links (rechts) in der Klasse?" Nicht wenige Kinder werden im Zweifel sein, ob links dort ist, wo sich die eigene linke Hand befindet, oder dort, wo sich die linke Hand des Lehrers befindet. Dann stellt sich der Lehrer hinter die Klasse mit derselben Frage. Die Verwirrung der Kinder dürfte noch anwachsen. Die entstehende Diskussion —

vor allem der Kinder untereinander — sollte zu der Einsicht führen, daß es im Klassenraum eine vordere und hintere sowie linke und rechte Wand gibt, unabhängig davon, wo der Betrachter steht (vgl. Abschnitt 2.2).

3.5. Der Lehrer fordert auf: „Werner, stelle dich vor die Klasse (Gesicht zur Klasse)!“ — „Erika, stelle dich links neben Werner!“ — „Gerd, stelle dich rechts neben Werner!“ — „Ulrike, stelle dich vor Werner!“ usw., weitere Kinder hinter, links vor, rechts vor, links hinter und rechts hinter Werner. Auf diese Weise entsteht ein „Gruppenbild“ mit $3 \cdot 3$ Kindern, in dessen Mitte Werner steht. Die aufgestellten Kinder sagen, wo sie stehen; z. B. Erika: „Ich stehe links neben Werner“ usw. Dann beschreiben Kinder aus der Klasse den Standort von Erika, Gerd, Ulrike usw. (verändertes Bezugssystem!). Schließlich kann man das Gruppenbild auch an die Tafel zeichnen, wobei die „Nasen“ gekennzeichnet werden müssen (Blickrichtung), und es wird erneut beschrieben, wer wo steht.

3.6. Der Lehrer zeichnet ein Rechteck an die Tafel und teilt es in $3 \cdot 3 = 9$ gleiche kleine Rechtecke auf. „Dies sind die Schubladen im Werkzeugschrank von Meister Meyer. In dieser Schublade sind die Nägel.“ Die Bezeichnung wird in eines der kleinen Rechtecke eingetragen. „Welche Schublade ist das?“ — z. B. „die in der mittleren Reihe links.“ In dieser Weise werden fortlaufend eingetragen: Bohrer, Schrauben, Schraubenzieher, Hammer, Zangen usw., und die Lage der betreffenden Schubladen wird beschrieben. Wenn alle „Schubladen“ bezeichnet sind, kann man variieren: Meister Meyer sagt zum Lehrling: „Hol mir mal eine Schraube aus der Schublade unten rechts!“ usw. Die Kinder sollen selbst entsprechende Aufforderungen formulieren und dabei die Lagebezeichnung einsetzen (Situationsspiel).

3.7. „Holger will aus Brettern eine kleine Kiste zusammennageln. Die Kiste soll oben offen sein. Wieviel Bretter braucht er?“ Zur Begründung der Anzahl 5 muß die Lage der einzelnen Bretter beschrieben werden, z. B.: „Eins vorn, eins hinten, eins links, ...“ usw.

3.8. Der Lehrer bringt drei verschieden große Holzreifen, z. B. aus Peddigrohr, mit. Die Reifen werden in verschiedene Lagen gebracht: ineinander, nebeneinander, berühren sich von innen bzw. von außen, aneinander usw. Die Kinder versuchen, die verschiedenen Lagen zu beschreiben. — Verfügt man über zwei gleiche Reifen-

sätze, so kann die Anordnung des einen Satzes rein nach der Beschreibung mit dem anderen Satz nachgelegt werden usw.

Zur Klärung der Begriffe „Ecke“ und „Kante“ in Verbindung mit den einfachen Ordnungsbegriffen eignen sich die folgenden Aufgaben:

3.9. „Nenne und zeige Ecken an Gegenständen!“ — Zum Beispiel an der Tischplatte, am Schrank, am Papierkorb usw. „Nenne und zeige Kanten an Gegenständen!“ — Zum Beispiel vorn an der Fensterbank, oben an der Tür, unten an der Wandtafel usw. Beim Zeigen sollte stets mit einem Finger an der ganzen Kante entlanggefahren werden.

3.10. Der Lehrer zeigt am Schrank z. B. auf die Ecke vorn oben links. „Wie kann man die Lage dieser Ecke beschreiben?“ Sagen die Kinder nur: „oben“, so läßt man alle vier oberen Ecken zeigen; entsprechend bei „links“ oder „vorn“, bis einsichtig geworden ist, daß die genaue Beschreibung der Lage nur mit allen drei Ordnungsbegriffen — „oben vorn links“ — erfolgen kann. Gegebenenfalls läßt man dazu auch die zwei Ecken „oben vorn“, die zwei Ecken „oben links“ usw. zeigen. — Dann zeigen die Kinder bestimmte Ecken, und die anderen müssen sie genau beschreiben, oder ein Kind beschreibt eine Ecke, und ein anderes zeigt sie usw.

3.11. „Wieviel Kanten hat der Klassenschrank (o. ä.)
a) oben (vier, nämlich oben links, oben rechts, oben vorn und oben hinten),
b) unten (ebenfalls vier, wie bei a),
c) an den Seiten?“ (ebenfalls vier, nämlich vorn links, vorn rechts, hinten links und hinten rechts).

3.12. „Wieviel Ecken hat der Klassenschrank (o. ä.)
a) hinten links oben (genau eine),
b) rechts unten (zwei, nämlich rechts unten vorn und rechts unten hinten),
c) oben?“ (vier, nämlich oben links vorn, oben links hinten, oben rechts vorn und oben rechts hinten).

3.13. „Wieviel Ecken (Kanten) hat der Klassenschrank insgesamt?“ Es kommt dabei vor allem auf die Begründung der genannten Anzahl durch eine übersichtliche Einteilung an, z. B.: „acht Ecken, nämlich oben vier und unten vier“ usw.

Die unerläßliche Auflockerung im Rhythmus einer Unterrichtsstunde muß möglicherweise nicht immer ein Spiel oder ein Lied bieten. So wie Erwachsene zuzeiten Entspannung in der gänzlich andersartigen Beanspruchung durch das Lösen einer Denksportaufgabe o. ä. zu finden vermögen, können in durchaus vergleichbarer Weise Kinder Auflockerung und Ermunterung in der Auflösung entsprechender Scherzaufgaben und Rätsel erfahren:

3.14. Herbert behauptet: „Ein Hund hat acht Beine! Nämlich vorn 2, links zwei, rechts zwei und hinten zwei." — Was stimmt da nicht? (Auch die Erweiterung auf „zwölf Beine" ist möglich, wenn man hinzunimmt: „... und an den vier ‚Ecken' je eines.")

3.15. Die Gänse gehen auf die Weide. Eine Gans geht vor zwei Gänsen; eine Gans geht zwischen zwei Gänsen; eine Gans geht hinter zwei Gänsen. Wieviel Gänse sind es (mindestens)? (Zur Klärung empfiehlt sich eine Zeichnung!)

3.16. Bernd und Lutz haben einen Wettlauf gemacht.
Bernd sagt: „Ich bin der erste und du bist der letzte!"
Lutz sagt: „Ich bin der zweite und du bist der vorletzte!"
Wer hat recht?

3.17. Rätselspiel: Der Lehrer beschreibt einen den Kindern gut bekannten Weg, z. B. im Schulhaus: „Ich gehe durch den Haupteingang, wende mich nach rechts, gehe zwei Stufen hoch und den Gang entlang und öffne die zweite Tür auf der linken Seite. Wo bin ich dann?" — Die Kinder gehen den Weg in der Vorstellung mit (Ordnungsbegriffe!) und nennen den betreffenden Raum, z. B. das Lehrerzimmer. Nach wenigen Übungen können die Kinder selbst Aufgaben dieser Art stellen. Das Spiel läßt sich auch als Wettspiel zwischen zwei Kindergruppen verwenden. Schließlich kann man variieren: Anfangs- und Endpunkt des Weges werden angegeben und der Weg selbst (gegebenenfalls mehrere Möglichkeiten) ist zu beschreiben.

Zur Unterscheidung und Klärung der einfachen Formtypen eignen sich die folgenden Aufgaben:

3.18. Nach Art der angelsächsischen „Droodles" (z. B. R. Price, Permabooks, New York 1953) zeichnet der Lehrer ohne Kommentar einfache geometrische Figuren an und fragt: „Was kann das sein?" Ein gleichschenkliges Dreieck z. B. veranlaßt die Kinder zu Interpretationen wie: Hausdach, Zelt, Mütze usw., bzw. Tüte, wenn Dreieck „auf dem Kopf" steht. Es eignen sich weiterhin: Quadrat, Rechtecke, verschiedene Dreiecke, Kreis, Sechseck usw., auch einfache zusammengesetzte Formen. (Ein Kreis mit Mittelpunkt wurde von Kindern eines 3. Schuljahres als „Frau mit Regenschirm, von oben gesehen" gedeutet; ebenso zwei konzentrische Kreise als „Spiegelei" oder „Sonnenhut, von oben gesehen"; ein kurzer gerader Strich als „Briefkastenschlitz" oder „Postkarte, genau von der Seite gesehen" usw.)

Kinder pflegen in der Deutung derart einfacher „Zeichnungen" sehr einfallsreich zu sein, so daß die Gespräche und Diskussionen darüber recht ergiebig sein können. Der Vorteil ist offenbar: Die Kinder erkennen den gegebenen Formtyp an Gegenständen ihrer Umwelt wieder; sie lernen Formen zu „sehen", zu unterscheiden und abzulösen; ihr Schatz verfügbarer Modelle wird vermehrt. Von besonderer Wichtigkeit ist es dabei, daß dieselbe Form nicht in stets derselben Lage auftaucht (z. B. Dreiecke nur mit „Basis unten" und „Spitze oben" oder Rechtecke nur mit waagerechter längerer Seite), sondern auch in verschiedenen gedrehten Lagen (z. B. Quadrat „über Eck", in Dreiecke „auf der Spitze stehend" usw.), so daß der Formtypus in jeder Lage mit Sicherheit wiedererkannt und identifiziert werden kann. Dann schließlich ist auch eine einheitliche Bezeichnung eines Formtypus möglich, und diese sollte von Anfang an allein die in der Geometrie übliche sein!

3.19. Wie sieht eine Konservendose genau von der Seite gesehen aus? — Zeichne an! (Rechteck) — Nenne weitere Gegenstände, die ebenso aussehen! (Kiste, Schrank, Tisch, Tafel usw.; dabei stets angeben lassen, von wo aus gesehen!)

3.20. Wie sieht ein runder Tisch genau von oben gesehen aus? — Zeichne an (Kreis) — Nenne weitere Gegenstände, die ebenso aussehen! (Dose, Schachtel, Faß usw.; von wo aus gesehen?) Es eignen sich des weiteren: Streichholzschachtel, Papierkorb, Blumentopf, Ball, Garnrolle, Pilz usw. von oben und/oder von der Seite aus gesehen. Wenn allmählich die geometrischen Bezeichnungen zur Verfügung stehen, braucht nicht mehr gezeichnet zu werden, und es genügt die Beschreibung der Form. Doch muß die Bezeichnung genau treffen (z. B. „Rechteck" bei der Streichholzschachtel, aber nicht „Viereck!"). In Zweifelsfällen läßt man die Form an die Tafel skizzieren und diskutieren.

3.21. Nenne Gegenstände, die rechteckige (kreisförmige, quadratische, dreieckige usw.) Flächen haben! — (Da es zunächst nur auf die Formtypen und noch nicht auf die einzelnen geometrischen Eigenschaften der Formen ankommt, muß hier von Fall zu Fall sorgsam diskutiert und unterschieden werden, ob es sich wirklich um ein Rechteck, Quadrat, allgemeineres Viereck usw. handelt.)

In diesem Zusammenhang kann auch das Verständnis für den Begriff „Flächeninhalt“ angebahnt werden:

3.22. Dieter braucht 16 Stunden, um den ganzen Garten umzugraben. Wie lange braucht er für folgende Stücke?

(Die Aufteilung kann selbstverständlich weiter variiert werden, so daß z. B. auch Drittel oder Achtel der Gesamtfläche auftreten. Ebenso läßt sich der Sachverhalt abwandeln, z. B. Pflastern eines Straßen- oder Wegstückes, Eindecken eines Daches, Streichen einer Hauswand usw. unter gleichzeitiger Veränderung der Ausgangsform: Dreiecke, Kreis, Quadrat usw.)

Die folgenden Aufgaben können der ersten Orientierung im Bereich des Symmetrischen dienen.

3.23. Der Lehrer stellt oder hängt eine Reihe sehr verschiedener, aber deutlich symmetrischer Gegenstände gut sichtbar auf, z. B. Puppe, Teddybär, Birne, einfach gemustertes Deckchen, Ahornblatt, Vase usw. „Was haben diese Gegenstände gemeinsam?“ — Es ergibt sich in der Regel eine lebhafte Diskussion der Kinder untereinander, in der sehr bald alle auf Gebrauch und Umgangsmöglichkeiten zielenden Deutungen als nicht für alle Gegenstände zutreffend verworfen werden. Als einzig gemeinsames Merkmal schält sich dabei die Symmetrie heraus, die von den Kindern leicht erkannt und mit „so schön gleichmäßig“, „alle lassen sich gut teilen“, „man kann immer zwei gleich große Hälften daraus machen“ usw. umschrieben worden ist. — Dann kann man die Kinder weitere Gegenstände „dieser Art“ aufsuchen lassen, sie ggf. anzeichnen und die „Halbierungslinie“ eintragen.

3.24. a) Als Fortsetzung können die Kinder Tintenklecksbilder anfertigen. Die Kinder entdecken schnell, daß man die besten Bilder erhält, wenn die Faltlinie des Papieres mitten durch den frischen Klecks gelegt wird. Die fertigen Bilder werden beschrieben und gedeutet (Ordnungs- und Qualitätsbegriffe!).
b) Desgleichen können die Kinder „halbe“ Figuren dieser Art „fertig“ zeichnen, z. B. Stern, Herz, Leiter, Schmetterling, Buchstaben, bekannte Formtypen usw. Geeignete Muster sollte der Lehrer als Abzüge vervielfältigt für jedes Kind bereitstellen.

3.25. An Taschentüchern, kleinen Decken, Papierblättern usw. läßt man durch Falten die Symmetrieeigenschaften nachprüfen. Daraus kann sich das bekannte Schneiden von Papierdeckchen ergeben. Zur Übung des Vorstellens sollte man bei einfachen Mustern *vor* dem Auseinanderfalten des Blattes fragen, wo überall und ggf. in welcher Lage der Schnitt *nach* dem Auseinanderfalten zu sehen sein wird und dies an einer entsprechenden Zeichnung zeigen und eintragen lassen.

Zur Fortsetzung und Erweiterung dieser Aufgabensammlung findet sich in der angegebenen Literatur weiteres Material.

4. Folgen und Ausblick

Wir haben uns möglicherweise allzusehr daran gewöhnt, im Unterricht von der „Veranschaulichung“ eines Inhalts unmittelbar zu seiner gedanklichen Durchdringung fortzuschreiten. Dabei werden jedoch die Grundfunktionen des Wiedererkennens, Vorstellens, Phantasierens und Sprechens wenig oder gar nicht beansprucht. Diese Funktionen aber gründen einerseits in der Anschauung und stellen andererseits die psychischen Voraussetzungen für das Denken schlechthin dar, d. h., sie bilden gewissermaßen die Brücke zwischen Anschauen und Denken. Die vorgeschlagene Geometrische Propädeutik zielt nicht zuletzt auf die Ausbildung dieser vernachlässigten Funktionen. Die Ergebnisse der bisherigen Unterrichtsversuche zeigen deutlich, daß auf der Basis einer derartigen Ausbildung die Konstruktion der strengen Begriffe vom Kinde ungleich leichter vollzogen werden kann und daß zum andern eine starke Motivation zum Fortschreiten in der Sache selbst (Geometrie) entsteht. Dies betrifft bemerkenswerterweise nicht nur die bereits eindeutig für weiterführende Schulen qualifizierten Kinder, sondern gerade die bei herkömmlicher Beanspruchung oft zugleich überforderten *und* unterforderten „andern“.

Damit gewinnt — insbesondere von den Möglichkeiten des Kindes her — eine in Ansätzen sich bereits abzeichnende grundlegende Reform des elementaren Mathematikunterrichts in der Grundschule an Bedeutung. Zur Zeit wird in unserer Grundschule ausschließlich Arithmetik betrieben („Rechenunterricht"). Schon eine Analyse der sogenannten Veranschaulichungsmittel für das Rechnen würde jedoch rasch bestätigen, daß dabei ständig geometrische Sachverhalte zur „Veranschaulichung" arithmetischer herangezogen werden (Zahlenleisten, Stecktafeln, „Felder", Bruchzahlbilder usw.). Es kann daher gefragt werden, ob nicht umgekehrt am Anfang die Hinführung zu geometrischen Inhalten und allgemeinen Ordnungsbeziehungen stehen sollte und das reine „Zahlenrechnen" erst an späterer Stelle einzusetzen hätte. Die vorläufigen Ergebnisse laufender Untersuchungen (und teils abgeschlossener, insbesondere im Ausland) scheinen die Möglichkeit und die vermuteten Vorzüge einer derartigen Reform zu bestätigen.

Literaturverzeichnis

1. W. Breidenbach, Raumlehre in der Volksschule, Schroedel-Verlag Hannover ([6]1964).
2. K. Falk, Die Pflege der Raumanschauung in den unteren Klassen der Volksschule, Österr. Bundesverlag Wien (1947).
3. Karaschewski-Odenbach, Neues Rechnen, Lehrerhefte 1—4, Klett-Verlag Stuttgart.
4. Müller-Nitzsche-Queisser-Förster, Wege zur Form, A. Huhle, Verlagsbuchhandlung. Dresden o. J. (ca. 1932).
5. Petermann-Hagge, Gewachsene Raumlehre, Verlag Herder Freiburg i. Br. (1935) bes. S. 22 f.
6. H. Rieckhoff, Rechnen, aber wie?, Schroedel-Verlag Hannover (1949).
7. H. Starke, Zur propädeutischen Behandlung der Geometrie in den Klassen 1 und 2, Verlag Volk und Wissen VEB, Berlin (1965).
8. F. Stückrath, Kind und Raum, Kösel-Verlag München (1955) bes. S. 77 f.
9. Die Welt der Zahl, Ausgaben für Hessen, Niedersachsen und Schleswig-Holstein, Lehrerausgaben 3 und 4, hrg. von Breidenbach-Bauersfeld, Schroedel-Verlag Hannover (1966/67).
10. Z. P. Dienes, Die Entdeckung des Raumes (Mathematik-Unterricht III), erscheint demnächst im Verlag Herder Freiburg i. Br.

Ferner unveröffentlichte Arbeiten zur 2. Lehrerprüfung, insbesondere von Werner Fuchs, Hannover; Ingrid Schaefer, Scheeßel, Krs. Rotenburg/Hannover und Karin Brüggemann, Uelsen, Krs. Grafschaft Bentheim.

Erziehung zum produktiven Denken

FESTGABE FÜR

ARTUR KERN

ZUM

65. GEBURTSTAG

HERAUSGEGEBEN

VON

HORST RUPRECHT

HERDER

Freiburg · Basel · Wien