Universität—GH—Paderborn Sommersemester 2002
FB 17

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler B

Übungen zu Abschnitt 9: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Allgemeine Vorbemerkung:

Denken Sie stets daran, den Definitionsbereich der betrachteten Funktionen zu beachten. Dessen Feststellung gehört jeweils mit zu Ihren Aufgaben!

9.1 Grundlagen
9.1.2 Definition und Darstellungsformen

9.1

Wiederholung Die Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen baut auf der Differentialrechnung für Funktionen mit einer Variablen auf. Bestimmen Sie daher zunächst (zur Wiederholung) die Ableitungen y' der nachfolgenden Funktionen $y = f(x)$

a) $y = \sqrt{e^x (\sin x)^2}$ b) $y = \sqrt{x \cdot e^x + x}; \quad (x > 0)$

c) $y = \log_5 \sqrt[4]{(\frac{3x^2-5}{2x+3})^3}; \quad (x \geq 2)$ d) $y = e^x \cdot (\ln x)^x; \quad (x > 1)$

e) $y = x^{x \cdot \ln x}; \quad (x \geq 1)$ f) $y = \ln(e^x + 1) - x - \frac{1}{e^x}$

g) $y = e^x \cdot \sqrt[x]{x}; \quad (x > 0)$ h) $y = (3x)^{4x}; \quad (x > 0)$

9.2

Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der durch nachfolgende Ausdrücke definierten Funktionen und skizzieren Sie ihn in der x, y–Ebene bzw. x_1, x_2–Ebene.

a) $z = \sqrt{1 - xy}$ b) $y = 2x_1 - 3x_2 + 5$

c) $z = \mid \frac{x}{y} \mid$ d) $z = 5 \ln(1 - e^{-x+4y})$

e) $y = e^{x_1^2 + x_2^2}$ f) $y = \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 - 9x_2^2 + 36}$

9.3

Skizzieren Sie in der x, y–Ebene (bzw. x_1, x_2-Ebene) die Höhenlinien

a) $z_1 = 0; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = 2$ zur Funktion in Nr. 9.2 a)

b) $y_1 = 0; \quad y_2 = -3; \quad y_3 = 1$ zur Funktion in Nr. 9.2 b)

c) $z_1 = 2$ zur Funktion in Nr. 9.2 c)

d) $y_1 = 0; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = 4$ zur Funktion in Nr. 9.2 e)

9.4

Wie lautet die explizite Form $z = f(x, y)$ der in impliziter Form gegebenen Funktion

$$\sin(xy)\, e^{x+yz} - 1 = 0 \quad ?$$

9.5

Gegeben seien die Funktionen

a) $z = xe^y$ und b) $z = x \cdot \ln(x+y)$

Skizzieren Sie

zu a) die Vertikalschnitte 1.) $z = f(2,y)$; 2.) $z = f(x, \frac{1}{2})$

zu b) die Vertikalschnitte 1.) $z = f(1,y)$; 2.) $z = f(x,2)$

9.1.3 Grundeigenschaften

9.6

Zeigen Sie durch direktes Nachprüfen der Definition, daß die durch
$(x,y) \mapsto f(x,y) := x^2 + y^2$
auf $I\!R^2$ definierte Funktion stetig ist.
(Hinweis: Weisen Sie nach, daß aus $\| (x,y) - (x_0,y_0) \| \to 0$ folgt $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \to 0$.)

9.7

Welche der folgenden Funktionen auf $I\!R^2$ sind auf dem angegebenen Definitionsbereich
- nach oben beschränkt
- nach unten beschränkt
- beschränkt ?

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ auf $D = I\!R^2$
b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ auf $D = I\!R^2$
c) $z = 1 - e^{x+y}$ auf $D = I\!R^2$
d) $z = 1 - e^{x+y}$ auf $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : y \leq -x\}$
e) $h(x_1,x_2) = \sin(e^{x_1^2 - x_2^2})$ auf $D = I\!R^2$
f) $g(u,v) = \frac{u}{v}$ auf $D = \{(u,v) \in I\!R^2 : -4 \leq v \leq 10, 1 \leq v \leq 2\}$

9.8

Untersuchen Sie, welche der nachfolgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich konvex oder konkav sind und ob die jeweilige Eigenschaft im strikten Sinne vorliegt.
a) $f(x,y) = x + 2y$ auf $I\!R^2$
b) $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ auf $I\!R^2$
c) $z(u,v) = uv$ auf $D = \{(u,v) : u > 0, v > 0\}$
Hinweis: Es soll durch Nachrechnen überprüft werden, ob die in der Definition der Konvexität (Konkavität) benannten Ungleichungen erfüllt werden oder nicht.

9.9

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen homogen sind und bestimmen Sie ggf. den Homogenitätsgrad.

a) $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

b) $\sqrt{x^4+xy^3}$

c) $z = \sqrt[5]{\frac{x^4y^3}{x^2+y^2}}$

d) $y = \sqrt{x_1+x_2+x_3}$

e) $y = ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + bx_1^{\beta}x_2^{1-\beta}$

f) $\sqrt[b]{\frac{x^a}{y^{2a}}}$

g) $z = \frac{d}{x}y + \frac{4x^2}{y^2}$

h) $\alpha x^a y^b + \beta x^b y^a$

i) $x = 16\sqrt{r_1 r_2}$

j) $\ln(x) + \ln(y)$

k) $y = x_1 e^{x_2}$

l) $y = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5$

m) $y = \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1+x_2}$

n) $\frac{x_1^2\, x_2^2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1}$

o) $\frac{x_1^a\, x_2 + x_2^a\, x_3 + x_3^a\, x_1}{x_3}$

p) $z = x^8 + x^5y^3 + x^3y^5 + y^8$

q) $y = \frac{x_1x_2}{x_3} + 4x_3 + \frac{x_3^3}{x_1x_2} + \frac{5x_2^2}{2x_1} + 3x_2$

9.10

Man bestimme den Homogenitätsgrad der CES (constant elasticity of substitution)–Produktionsfunktion

$$y = [aL^{-b} + (1-a)K^{-b}]^{-\frac{c}{b}}$$

Dabei bedeuten y=Output, L=Arbeit, K=Kapital und a,b,c sind positive Parameter.

9.2 Differentialrechnung
9.2.1 Partielle Ableitungen

9.11

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

a) Für alle Funktionen in Aufgabe 9.2

b) $z = \frac{1}{xy^2} + \frac{x^2}{y}$

c) $y = (x_1^2 - x_2^2)^3(x_2^2 - x_3^2)^4$

d) $z = x^y;\ x > 0$

e) $z = \ln\frac{x}{x-y}$

f) $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $y = \frac{3x_1^2 + x_2x_3}{x_3^3}$

h) $z = e^{xy}$

i) $y = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

j) $z = 3ye^{5x}$

9.12

Welchen Zahlenwert nimmt 1.) f_x und 2.) f_y für $x = 2, y = 3$ an

a) bei Aufgabe 9.11 b)
b) bei Aufgabe 9.11 d)
c) bei Aufgabe 9.11 e)
d) bei Aufgabe 9.11 f)

Interpretieren Sie jeweils den gefundenen Zahlenwert.

9.13

Vorbemerkung: Sei $x = f(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ eine Produktionsfunktion mit dem Output x und den Produktionsfaktoren $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dann nennt man f_{r_i} die "Grenzproduktivität" bezüglich des Produktionsfaktors r_i.

a) Die Produktionsfunktion eines Gutes ist

$$x = 10r_1 + 5r_2 - r_1^2 - 2r_2^2 + 3r_1r_2$$

Gesucht ist die Grenzproduktivität des Faktors r_1 für $r_1 = 1$ und $r_2 = 4$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Bestimmen Sie für $x = 2r_1r_2 + 12r_1^2 - 4r_2^2$ die Grenzproduktivität des Faktors r_1 und des Faktors r_2 jeweils als Funktion von r_1 und r_2. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Die Produktionsfunktion einer Unternehmung ist

$$x = 200A + 100B + 20C - 2A^2 - B^2 - C^2 - 10AB = 2AC - 5BC$$

a) Bestimmen Sie die Grenzproduktivität A (Arbeit), B (Boden), C (Kapital).

b) Bestimmen und interpretieren Sie die einzelnen Grenzproduktivitäten für $A = 1, B = 2, C = 5$.

9.14

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für

a) $y = x_1^2 + x_2^2$ b) $y = x_1^3 x_2^2$ c) $z = \dfrac{x}{y}$

d) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ e) $y = 3x_2 e^{5x_1}$ f) $y = x_1^4 \cdot x_2^2 + x_1 \cdot x_2^5$

g) $y = x_1^{3/2} \cdot x_2^{1/2}$ h) $y = e^{x_1 \cdot x_2} + e^{x_1 + x_2} + \ln(x_1 \cdot x_2)$

9.15

Bilden Sie zu den Funktionen der Aufgabe 9.14 f), 9.14 g), 9.14 h) sämtliche partiellen Ableitungen dritter Ordnung; ebenso für die Funktion

$$y = e^{x_1 x_2 x_3}.$$

9.16

a) Zeigen Sie für die Funktion $y = (x_1 - x_2)^{x_3}$ die Gleichheit der partiellen Ableitungen dritter Ordnung

$$f_{x_1x_2x_3} = f_{x_3x_2x_1},$$

b) Weisen Sie für die Funktion

$$y = x_1^2 \ln[\sin(x_2 - x_3)]$$

die Richtigkeit folgender Gleichungen nach

$$1.)\ f_{x_1x_2x_3} = f_{x_3x_2x_2}$$
$$2.)\ f_{x_2x_2x_3} = f_{x_3x_2x_2}.$$

9.2.2 Totale Differenzierbarkeit

9.17

Für die Funktionen

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $z = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3$

c) $z = 3ye^{5x}$ d) $z = \ln(x + y)$

e) $z = e^{xy}$ f) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

berechne man:

a) den Gradienten allgemein (wo ist dieser definiert?)

b) den Gradientenvektor in den Punkten (1;1) und (1;2)

c) die Menge der Punkte, in denen der Gradient der Nullvektor ist.

9.18

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) \;=\; \dfrac{x}{x+y}$

a) Bestimmen Sie grad $f(x,y)$ im Punkt $(-1;3)$.
b) Interpretieren Sie das Ergebnis.
c) Für welchen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gilt:

$$\text{grad } f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} ?$$

d) Überprüfen Sie das Ergebnis aus Aufgabe c) durch Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe a).
Anleitung: Setzen Sie die erste Komponente aus der Lösung a) gleich s und die zweite Komponente gleich t, gehen Sie mit diesen Zahlenwerten in die Lösung c, und vergleichen Sie, ob mit diesen Werten $x_0 = -1$ und $y_0 = 3$ wird.

9.19

a) In welcher Richtung wächst

$$z \;=\; x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$$

im Punkt $(x,y) = (2;1)$ am stärksten?

b) Skizzieren Sie den Punkt $(2;1)$ und die Richtung des stärksten Wachstums in der x,y–Ebene.
c) Wie groß ist die maximale Wachstumsrate im Punkt (2,1)?

9.20

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen den Gradienten an den angegebenen Stellen P_1 und P_2.

	P_1	P_2
a) $z = 2xy^2 - 5yx^2$	$(1,1)$	$(-1,1)$
b) $z = y^2 e^{x^2}$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
c) $z = 4x + 3xy + 2y^2$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
d) $z = x^y e^{xy}$	$(1,1)$	$(1,2)$
e) $z = 10x^3y + 20xy^2 + 5xy$	$(0,1)$	$(1,0)$

Geben Sie in a)-c) die Menge der Punkte an, in denen der Gradient der Nullvektor ist.

9.21

In welcher Richtung ändert sich

$$z = 2x^4 + 8x^3 + 4x^2y^2$$

im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ am stärksten?
Skizzieren Sie das Ergebnis in der x,y-Ebene.

9.22

Man berechne den Gradienten für folgende Funktionen in drei Variablen:

a) $y = 3x_1x_2 + 2x_2^2x_3 + x_1^2x_3$

b) $y = \frac{x_1+x_2}{x_3}$

c) $y = x_1 \ln(x_2 x_3)$

9.23

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen mit drei Variablen x_1, x_2, x_3 den Gradienten

a) $y = ex_1x_2x_3$ b) $y = x_1^2 x_2 x_3^5$ c) $y = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3}$

9.24

(* Aufgabe mit höherem Schwierigkeitsgrad)
Welchen Abstand hat die Tangentialebene an den Graphen der Funktion
$(x, y) \mapsto e^{xy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
über dem Punkt $(x, y) = (0, 0)$ vom Koordinatenursprung im $\mathbb{R}^3$?

9.25

Bilden Sie das totale Differential der Funktion

$$y = 5(x_1 + x_2 + x_3)$$

Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle $x_0^{'} = (3, 2, 4)$?
Um wieviel ändert sich dieser Funktionswert, wenn die unabhängigen Variablen ihre Werte um $\Delta x_1 = 1, \quad \Delta x_2 = 2$ und $\Delta x_3 = -2$ ändern?

9.26

Bestimmen Sie Δz und dz für die Funktion $z = \dfrac{x^2}{y}$ an der Stelle $x = 12, \quad y = -3$ mit $\Delta x = \Delta y = 0,2$.

9.27

Es ist das totale Differential der Funktion

$$y = 3x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$$

an der Stelle $x_1 = 2, \quad x_2 = -4$ und $x_3 = 1$ zu bestimmen
und für $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,25$ auszuwerten.

9.28

Berechnen sie für jede der nachfolgenden Funktionen das totale Differential

a) $y = 5x_1x_2x_3$ b) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

c) $y = 4x_1^3 - 6x_1^2x_2^2 + 4x_2^3$ d) $y = e^{x_1^2 x_2^3}$

e) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ f) $y = (x_1^a - x_2^b)^n$

g) $z = x^y$ h) $y = x_1^{x_2x_3} \quad (x_1 \neq 0)$

i) $y = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ j) $y = \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_3} \quad (x_3 \neq 0)$

k) $z = a^x + b^y,\ a, b \neq 0$ l) $y = (x_1 + x_2)^{x_3}$

m) $y = \frac{(ax_1 - bx_2)^n}{x_3}$ n) $z = \ln(\frac{x_1x_2}{x_3})$

9.29

Bestimmen Sie die ungefähre Änderung des Funktionswertes der Funktion

$$y = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

wenn man von der Stelle $x_1 = 5, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2$ zur Stelle $x_1 = 5,1,$ $x_2 = -2,8$ und $x_3 = 1,9$ übergeht.

9.30

Berechnen Sie für folgende Funktionen jeweils mit Hilfe des totalen Differentials näherungsweise die Änderung der Funktionswerte beim Übergang vom Punkt P_0 zum Punkt P_1 und vergleichen Sie die Näherungslösung mit der exakten Lösung.

Aufg.	Funktion	P_0	P_1
a)	$y = \sqrt{x_1} \cdot x_2^2$	(1;1)	$(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$
b)	$y = x_1^2 - 2x_1x_2 + 0,5x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 1$	(2;3)	(2;4)
c)	$y = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_3$	(1;2;1)	(2;1;2)

9.31

a) Es gelten die Funktionen von Aufgabe 9.13 a) und b). Wie ändert sich der Output, wenn

r_1 von 2 auf 2,03 vergrößert und

r_2 von 2 auf 1,96 verringert wird?

(Näherungslösung mit Hilfe des totalen Differentials).

b) Dasselbe für die Funktion aus Nr. 9.13 c) mit:

A wird von 4 auf 4,2 erhöht

B wird von 2 auf 1,7 verringert

C wird von 5 auf 4,9 verringert.

9.32

Gegeben seien die durch folgende Ausdrücke auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen:
a) $f(x, y) = x^2y^2$
b) $g(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \quad 0 \notin \{a, \ldots, f\}$
c) $h(x, y) = e^{x+y}$.
Geben Sie für jede dieser Funktionen die Gleichung der Taylorapproximation
I) 1. Ordnung (Funktionsdarstellung der Tangentialebene)
II) 2. Ordnung (Schmiegefläche 2. Ordnung)
in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) an.
Welche Formeln ergeben sich in den Spezialfällen $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_0, y_0) = (1, 1)$?

9.2.3 Konvexitätsbedingungen

9.33

Untersuchen Sie mit Hilfe der Hesse-Determinanten, welche der folgenden Funktionen im Inneren des angegebenen Definitionsbereiches strikt konvex bzw. konkav sind.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2$ für $x \in [0,\infty)$, $y \in [0,\infty)$
b) $g(x,y) = x^4 + 2x^3y - 6y^2$ auf $D := [0,\infty) \times [0,\infty)$
c) $\phi(u,v) = u^2v^2$ auf $D := [0,1] \times [0,1]$
d) $H(\underline{x}) = e^{x_1^2+x_2^2}$ für $\underline{x} \in I\!R^2$ mit $\| \underline{x} \| < 1$

9.2.4 Kettenregel und implizite Differentiation

9.34

Bilden Sie mit Hilfe der Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher die Ableitung folgender reeller Funktionen:
a) $x^x \quad (x > 0)$ b) $x^{x^x} \quad (x > 0)$
c) $\sqrt[x]{\sin^2 x} \quad (x > 0)$ d) $\log_x(x^2) \quad (x > 0)$

9.35

(* Aufgabe mit höherem Schwierigkeitgrad)
Leiten Sie die aus der Differentialrechnung mit einer Veränderlichen bekannte
a) Produktregel
b) Quotientenregel
aus der Kettenregel für Funktionen zweier reeller Veränderlicher ab.

9.36

Durch die nachfolgenden Gleichungen werden Kurven K im $I\!R^2$ definiert. Untersuchen Sie zunächst, welche Punkte der Kurve K eine Umgebung besitzen, in der die Kurve mit dem Graphen einer differenzierbaren Funktion $x \mapsto y = f(x)$ übereinstimmt, und bilden Sie dann die Ableitung $y' = f'(x)$ für diese Punkte durch implizite Differentiation. Beachten Sie dabei, daß diese Ableitung von beiden Koordinaten des betrachteten Punktes abhängen kann. (Falls möglich, geben Sie die Darstellung $y = f(x)$ explizit an und bilden Sie die gewünschte Ableitung zum Vergleich auch durch direkte Differentiation.)

a) $x^2 + y^2 - 49 = 0$ b) $x^2 - xy + y^2 = 1000$

c) $e^x + e^y + e^{xy} = 10$ d) $xy + \ln(x \cdot y) = 4$

e) $\ln x + \ln y = 13$ f) $e^x + e^y - 2\ln y = 0$

g) $\ln[x(1+y)] + (x+1)^2 = 0$ h) $x^y = y^x = 0$

i) $ax^\alpha y^\beta - c = 0 \quad (\alpha, \beta > 0)$ k) $y \cdot e^x + x \cdot e^y = 0$

9.37

Gegeben sei die implizite Funktion $F(x,y) = 0$

$$x^3 + y^3 - x^2y^2 - x^2 - xy + y = 0$$

a) Geben Sie $y' = y'(x,y)$ allgemein an.
b) $y'(0;0)$?, $y'(1;1)$?, $y'(1;0)$?

9.38

Man bestimme den numerischen Wert für y' folgender implizit gegebener Kurvengleichungen:

a) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ für $x = 1$

b) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ für $x = 0,5$

9.39

Man bestimme bei der implizit gegebenen Kurve

$$x^4(x-y) + 2x^2y(x+y) + y(x^2+y^2) + c \;=\; 0$$

die Konstanten c so, daß die Kurve durch den Punkt $P(1;1)$ geht und ermittle die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

9.40

Für die folgenden Funktionen ist die Ableitung y' durch implizite Differentiation zu bestimmen:

a) $5x^2 + 15y^2 - xy = 100$ b) $e^{2x+2y} = 10$

c) $\ln((x+1)^2)\ln(y) = 1$ d) $e^{1/x} - e^{1/y} = 16$

e) $\frac{a^x b^y}{x} = 130,\ a,b > 0$ f) $10x^5y^4 = 4$

g) $\sqrt[3]{a^x} + \sqrt{b^y} = 2,\ a,b > 0$ h) $x\ln(xy) + y = 8$

i) $ax^2 + by^2 + cx^2y^2 - x = 0$

9.41

a) Wie lautet die zweite Ableitung y'' der durch

$$F(x,y) \;=\; xy - x^4 + y^2 \;=\; 0$$

bestimmten Funktion?

b) Welchen Wert hat $y''(1;1)$ für die implizite Funktion

$$y \cdot \ln x - x \ln y \;=\; 0?$$

9.42

Welchen Wert hat die zweite Ableitung y'' der impliziten Funktion

$$x^3 + 2y^3 - xy + x^2 + y = 0$$

an der Stelle $x = 1,\ y = -1$?

9.2.5 Partielle Elastizitäten

9.43

Bilden Sie die partiellen Elastizitäten ϵ_{zx} und ϵ_{zy} der folgenden Funktionen $z = f(x,y)$:

a) $z \;=\; x^2 + y^2$ b) $z \;=\; \dfrac{a^x}{y}$ c) $z \;=\; Ax^ay^b$

d) $z \;=\; x^2 + xy + y^2$ e) $z \;=\; \sqrt{xy}$

9.44

Ermitteln Sie für die folgenden Produktionsfunktionen $x = f(r_1, r_2)$ die partiellen Elastizitäten $\epsilon_{xr_1}, \epsilon_{xr_2}$

a) $x \;=\; ar_1^\alpha r_2^\beta$ b) $x \;=\; \sqrt{-ar_1^2 + 2br_1r_2 - cr_2^2}$

9.45

a) Wie lauten die Zahlenwerte der Ergebnisse aus Aufgabe 9.44 an der Stelle $r_1 = 2$ und $r_2 = 1$, wenn $a = 1$; $b = 5$; $c = 2$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,75$ ist?

b) Interpretieren Sie diese Ergebnisse.

9.46

Die Nachfrage x_A nach dem Gut A sei von den Preisen p_A und p_B der Güter A und B wie folgt abhängig:

$$x_A = 25 - 2p_A + p_B$$

Wie lautet die partielle Nachfrageelastizität bezügl. des Preises p_A bzw. p_B? (Also $\epsilon_{x_A p_A}, \epsilon_{x_A p_B}$).

Interpretieren Sie das Ergebnis.

9.47

Die Nachfragefunktion eines Produktes A sei

$$x_A = 16 - 2p_A + p_B \qquad (x_A, p_A, p_B \text{ wie in Aufg. 9.46}).$$

Bestimmen Sie

a) die partielle Nachfrageelastizität bezüglich des Preises p_A, also $\epsilon_{x_A p_A}$

b) den Wert für $\epsilon_{x_A p_A}$ für $p_A = 3$ und $p_B = 1$.
Interpretieren Sie das Ergebnis zu b).

9.48

Bilden Sie die partiellen Elastizitäten ε_{zx} und ε_{zy} von $z =$

a) $x^a + y^b$ b) ya^x c) $\sqrt{-x^2 + y^2}$

d) e^{x+y} e) $y \ln(x)$

9.49

a) Die Nachfrage x_A nach dem Gut A sei von den Preisen p_A und p_B der Güter A und B wie folgt abhängig:

$$x_A = -(p_A^2 p_B + p_A)$$

Wie lauten die partiellen Nachfrageelastizitäten $\varepsilon_{x_A p_A}$ und $\varepsilon_{x_A p_B}$?
Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) dasselbe mit $x_A = -20p_A + 10p_B + 10$.

9.50

Gegeben sei die Nachfragefunktion

$$x^2 p^3 = 1.$$

Bestimmen Sie mit impliziter Differentiation die Nachfrageelastizität bezüglich des Preises.

9.3 Extremwerte
9.3.2 Stationäre Punkte und lokale Extrema

9.51

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen im Inneren ihres natürlichen Definitionsbereiches auf Extremwerte und Sattelpunkte:

a) $y = 3x_1x_2 + 5(x_1 - 3)^2 - (2x_1 + 5) \cdot (x_2 - 7)$

b) $y = 5x_1^2x_2 + 3(x_1 - 5)^2 - 20x_2 + 100$

c) $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$

d) $z = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$

e) $z = x^3y^2 \cdot (a - x - y) \quad$ (mit $a \in I\!R$)

Anmerkung: Ist die Antwort von der Größe des Parameters a abhängig? Das heißt, sind nähere Angaben dazu erforderlich, ob ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt oder ob keine diesbezügliche Entscheidung getroffen werden kann.

f) $z = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$

g) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

h) $z = -4x^2 - 9y^2$

i) $z = 4x^2 + xy - 6y^2 + 5$

k) $z = \sqrt{4x^2 - 16x + 17 + 9(y-3)^2}$

l) $y = x_1^2 + 0,5x_2^2 - x_1x_2 - x_1 + 2x_2 + 7$

m) $y = (x_1 - x_2)^2$

m) $z = 4x^4 - 2x^2 - 0,5y^4 - 2y^2 + 4xy + 23$

o) $y = x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + 5x_1 + 5x_2$

p) $z = -x^3 - y^2 + 3x + 4y + 9$

q) $z = \sqrt{1 - xy}$

r) $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 - x_1 - x_2$

Auch hier gilt die Anmerkung zu Aufgabe e)

s) $y = 3x_1x_2^2 - 3x_2^2x_3 + 3x_3 + 12x_1x_2 - 3x_1^2x_2$

t) $y = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_3 - x_4^2 + 2x_4.$

9.3.3 Bestimmung globaler Extremwerte

9.52

Auf einer gegebenen landwirtschaftlichen Fläche sind r_1 Mengeneinheiten eines Kunstdüngers A und r_2 Mengeneinheiten eines Kunstdüngers B zur Erreichung von x Produkt–Mengeneinheiten einzusetzen. Es gilt die Produktionsfunktion

$$x = 240 + 4r_1 + 10r_2 - r_1^2 + 3r_1r_2 - 2,5r_2^2.$$

Welche Produktions-Faktormengenkombination führt zum Produktionsmaximum und wie groß ist dieses?

9.53

a) Ein Monopolist stelle die beiden Güter X_1 und X_2 her. Die Preis–Absatz–Funktionen für beide Güter seien

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 - 4p_1 + 2p_2 \\ x_2 &= 10 + p_1 - p_2 \end{aligned}$$

wobei p_i der Preis für das Gut X_i ist (in Geldeinh./Mengeneinh.) mit $i = 1, 2$.

Die Gesamtkostenfunktion laute:

$$K = 1{,}5x_1^2 + 2x_2^2 + 0{,}5x_1x_2.$$

Man bestimme den maximalen Gewinn G und den ihm zugrundeliegenden Output x_1, x_2.

b) Dasselbe für $x_1 = 8 - 2p_1 + p_2$; $x_2 = 10 + p_1 - 3p_2$

$$K = x_1^2 + x_2^2.$$

c) Ermitteln Sie auch jeweils die Güterpreise p_1 und p_2, die zum Gewinnmaximum führen.

d) Wie würde der Definitionsbereich von G lauten, falls G als Funktion von p_1 und p_2 dargestellt würde, also $G = f(p_1, p_2)$?
Stellen Sie den Definitionsbereich graphisch in der p_1, p_2-Ebene dar.

9.54

Bei einer Serienproduktion, die einen bestimmten Vorrat an Material verlangt, können Fehlmengen im Materiallager auftreten. Ohne auf die Herleitung einzugehen, sei hier die Funktion für die Gesamtkosten einer Produktionsserie angegeben:

$$K = \frac{s^2}{2x} \cdot K_1T + \frac{(x-s)^2}{2x} \cdot K_2T + \frac{K_3R}{x}.$$

Dabei bedeuten:

K_1	Kosten für die Lagerung einer Mengeneinheit je Zeiteinheit
K_2	Kosten für auftretende Fehlmengen je Zeiteinheit (z. B. Verluste durch nicht termingerechte Lieferung)
K_3	Vorbereitungskosten je Produktionsserie
T	Produktionszeitraum
R	Material für die erforderliche Produktion im Zeitraum T
x	Seriengröße, Los
s	Lagerbestand an Material zu Beginn der Produktionsserie.

Die Größen K_1, K_2, K_3, T und R sind bekannt. Die Gesamtkosten K hängen somit von zwei Variablen x und s ab.

Die Forderung lautet: Die Gesamtkosten sollen möglichst niedrig gehalten werden! Deshalb müssen die Seriengröße x und der erforderliche Lagerbestand s ermittelt werden.

Entwickeln Sie je eine Formel für x_{opt} und s_{opt}.
Sind Lösungskombinationen für x und s denkbar, so daß $K < 0$ wird ? Das heißt: ist der Definitionsbereich von $K = f(x, s)$ beschränkt ?

9.55

Ein Verleger verkauft ein bestimmtes Buch mit hartem Umschlag zu einem Preis von p_H an Bibliotheken und mit weichem Umschlag als Studienausgabe an Studenten zu einem Preis von p_W. Die entsprechenden Nachfragefunktionen sind

$$x_H = 5000 - 30p_H + 10p_W$$

$$x_W = 20000 - 100p_W + 5p_H$$

Die Produktionskosten für ein Buch mit hartem Umschlag sind 50 (GE) und mit weichem Umschlag 45 (GE). Welche Verkaufspreise soll der Verleger festsetzen, um den Gewinn zu maximieren?

9.56

Für welche Werte von $a \neq 0$ besitzen die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ mindestens ein
1.) lokales
2.) globales
Extremum und um welche Art von Extremum (Minimum oder Maximum) handelt es sich ggf.? Wie lauten die Koordinaten x, y des gegebenenfalls existierenden Extremwertes?

a) $z = -x^3 + 6axy - y^3$

b) $z = ax^2y^3 - \frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^4$

9.57

Der nachfolgend wiedergegebene Text stellt einen Auszug aus dem Lehrbuch:
Huang/Schulz,"Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler", München 1979 dar.
Überprüfen Sie das ausführlich dargestellte Beispiel (Text von $\rightarrow$ bis $\leftarrow$) und äußern Sie sich zu dem ermittelten Ergebnis $p_1 = 16, \quad p_2 = \frac{25}{3}$.

$\rightarrow$ Dennoch wollen wir jetzt ein Beispiel betrachten, in dem wir sowohl die notwendigen als auch die hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen eines Maximums zu prüfen haben. Die Nachfrage nach den Gütern X_1 und X_2 sei durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x_1 = 5 - p_1 + 2p_2$$
$$x_2 = 4 + p_1 - 3p_2$$

Die Kostenfunktion sei gegeben durch

$$K = 4x_1 + 2x_2$$

dann gilt für die Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} G &= p_1x + p_2x_2 - 4x_1 - 2x_2 = \\ &= 5p_1 - p_1^2 + 2p_1p_2 + 4p_2 + p_1p_2 - 3p_2^2 - 20 + 4p_1 - 8p_2 - 8 - 2p_1 + 6p_2 = \\ &= -p_1^2 - 3p_2^2 + 3p_1p_2 + 7p_1 + 2p_2 - 28\,. \end{aligned}$$

Hierbei drücken wir zunächst G explizit als Funktion von p_1 und p_2 aus, um auf diese Weise leichter diejenige Kombination von p_1 und p_2 zu finden, für die G ein Maximum annimmt. Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum sind folgende:

(5.11.7) $$\frac{\partial G}{\partial p_1} = 0 = -2p_1 + 3p_2 + 7$$

(5.11.8) $$\frac{\partial G}{\partial p_2} = 0 = -6p_2 + 3p_1 + 2$$

Durch gleichzeitiges Auflösen erhält man daraus

(5.11.9) $p_1 = 16 \qquad p_2 = 253$

Ob mit Lösung (5.11.9) auch die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind, ist noch zu prüfen:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p_2^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p_2 \partial p_1} = 3$$

und

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial p_2^2} - (\frac{\partial^2 G}{\partial p_2 \partial p_1})^2 \; = \; (-2) \cdot (-6) - 9 > 0$$

`An der Stelle`

$p_1 \; = \; 16 \quad p_2 \; = \; \frac{25}{3}$

`liegt also ein Maximum vor.` $\leftarrow$

9.58

Für die durch

$$f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion ermittle man alle Punkte (x,y), in denen $\| \bigtriangledown f(x,y) \|$ ein Maximum annimmt. (Geben Sie eine geometrische Deutung der Lösung.)

9.59

Der von einem Unternehmen, das zwei Produkte P_1 und P_2 herstellt, bei Absatz von p_1 [ME P_1] und p_2 [ME P_2] erzielte Gewinn betrage

$$G(p_1,p_2) = \frac{10}{(p_1-2)^2 + 3(p_2-5)^2 + 3} - 0.25, \quad p_1, p_2 \geq 0$$

(Negativer Gewinn wird als Verlust gedeutet.)

a) Die in der letzten Rechnungsperiode erzielten Absätze (p_1^0, p_2^0) sollen diesmal geringfügig korrigiert werden, wobei ein möglichst hoher Gewinnzuwachs angestrebt wird. In welcher Richtung ist der Absatz zu korrigieren, damit auch bei sehr kleinen Korrekturen der Gewinnzuwachs möglichst groß ist? Wie groß ist die entsprechende Gewinnzuwachsrate?

b) In welchem(n) Punkt(en) ist die Gewinnzuwachsrate maximal?

9.60

Stellen Sie fest, welche der Funktionen aus Aufgabe 9.51 ein globales Maximum und/oder ein globales Minimum besitzen, und bestimmen Sie ggf. alle zugehörigen Extremstellen. (Es wird jeweils der natürliche Definitionsbereich betrachtet, d.h. die größtmögliche Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, auf der der zugrundeliegende Ausdruck sinnvoll ist.)

9.4 Extremwerte unter Nebenbedingungen

9.61

Gegeben seien die Kostenfunktion $K = 6r_1 + 8r_2$,
sowie die Produktionsfunktion $x = 5r_1^2 r_2$, wobei
r_1, r_2 [in ME]Produktionsfaktormengen,
$p_1 = 6$ [GE/ME], $p_2 = 8$ [GE/ME]Faktorpreise und
x [in ME] die produzierte Menge bedeuten.

a) Skizzieren Sie die Isokostenlinie für
$K = 8$ [GE], $K = 12$, $K = 16$ [GE].

b) Skizzieren Sie die Isoquanten
$x = 60$ [ME], $x = 80$ [ME], $x = 100$ [ME].

c) Ermitteln Sie graphisch das Kostenminimum bei einem Produktionsniveau von $x = 80$ [ME]. Geben Sie den optimalen Produktionsfaktoreinsatz an.

9.62

Bestimmen Sie
(1.) durch Substitution
(2.) mit Hilfe des Lagrangeschen Ansatzes die Extremwerte der Funktionen:

a) $z = 5xy - y^2$ unter Beachtung der Nebenbedingung $x + y = 12$

b) $z = -4x^2 + y^2$ mit der Restriktion $y = x + 6$

c) $z = 2x + 4y$ mit der Nebenbedingung $y + x^2 = 10$

d) $z = 5 - (x-3)^2 - 2(y-2)^2$ mit $x + y = 3$

e) $z = x^2 + y^2 - 6(x+y) + 18$ mit $x + 2y = 10$

f) $y = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$ mit $2x_1 - x_2 = 5$ und mit $x_1 + x_3 = 7$

g) Ermitteln Sie in allen Fällen nach Lösungsweg (2.) auch die Größe der jeweiligen Lagrangeschen Multiplikatoren und interpretieren Sie jeweils diesen Wert.
Beachten Sie dabei, daß es bei Aufgabe f) zwei verschiedene Lagrangesche Multiplikatoren gibt!
Überprüfen Sie auch Ihre jeweilige Interpretation durch die – Ihrer Interpretation entsprechende – genaue Rechnung.

9.63

Untersuchen Sie mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren folgende Funktionen auf Extremwerte:

a) $K = 6r_1 + 12r_2$ unter Berücksichtigung der Beschränkung $80 = 5r_1^2r_2$

b) $z = y^2 - x$ mit der Restriktion $x^2 + y^2 - 2,5 = 0$

9.64

Fragen der Art, wie sie im nachfolgenden Kasten gestellt werden,

Ein Gut wird mit den beiden Produktionsfaktoren x_1 und x_2 gemäß der Produktionsfunktion $y = c\sqrt{ax_1^2 + bx_2^2}$ produziert (a, b, c sind positive Konstanten). Die konstanten Faktorpreise sind q_1 und q_2. Bei welcher Faktorkombination kann ein vorgegebenes Produktionsniveau y_0 mit minimalem Kosteneinsatz produziert werden?

werden oft dahingehend beantwortet, daß man sagt: Das Verhältnis der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren muß gleich dem Verhältnis der entsprechend gewichteten Preise sein, hier also

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{bq_1}{aq_2}.$$

Äußern Sie sich zu diesem Lösungsprinzip!

Siehe dazu auch den Beitrag in der Zeitschrift "das wirtschaftsstudium (wist)", Heft 2/1987, S. 77 und Heft 3/1988, S. 129 ff. (Signatur unserer Bibliothek: P30 49 w 11).

9.65

Die Produktionsfunktion eines Unternehmens laute:

(1) $x = a_0 r_1^{a_1} r_2^{a_2}$ (mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathrm{R}$ konstant)

und die Gesamtkostenfunktion laute:

(2) $K = q_1r_1 + q_2r_2$,

wobei r_1, r_2 Produktionsfaktoren und q_1, q_2 deren Faktorpreise bedeuten.

a) Die Inputkombination r_1, r_2 welche ein Outputmaximum bei gegebenen Kosten K_0 garantiert, ist mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens zu bestimmen.

b) Unter Berücksichtigung der unter a) gefundenen Inputwerte sind die Gesamtkosten-, Durchschnittskosten- und Grenzkostenfunktion herzuleiten.

9.66

Gegeben sei die Produktionsfunktion $x = f(r_1, r_2)$ mit der Kostengleichung

$$K = q_1 r_1 + q_2 r_2,$$

wobei r_1, r_2 Produktionsfaktoren und q_1, q_2 deren Faktorpreise bedeuten.
Bestimmen Sie die notwendigen Bedingungen für

a) das Produktionsmaximum bei einem vorgegebenem Budget $K = K_0$

b) das Kostenminimum bei einer vorgegebenen Ausbringungsmenge $x = x_0$.

9.67

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x = 10 r_1^{1/4} r_2^{3/4}.$$

Die Preise der Produktionsfaktoren r_1, r_2 betragen $q_1 = 2$ und $q_2 = 6$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode die Minimalkostenkombination für den Output $x = 30$.

b) Interpretieren Sie den gefundenen Zahlenwert des Lagrangeschen Multiplikators.

c) Bestimmen Sie die zu der Produktionsfunktion gehörige Kostenfunktion K als Funktion von x, also $K = f(x)$.

9.68

Für einen Haushalt gilt die Nutzenfunktion $N = xy$, wobei x und y Gütermengen darstellen, deren Preise $p_x = 25$ und $p_y = 30$ (GE pro ME) betragen.
Das Haushaltsbudget weist für die beiden Güter x und y insgesamt $E = 600$ (GE) auf.

a) Welche Güterkombination führt zum Nutzenmaximum?

b) Wie groß ist der maximale Nutzen?

c) Wie muß sich das Haushaltsbudget ändern, wenn der unter b) errechnete maximale Nutzen beibehalten werden soll, der Preis des Gutes y jedoch auf $p_y = 40$ GE steigt?

9.69

Ein Dosenfabrikant will zylindrische Blechdosen von 1 l Inhalt ($= 1000 cm^3$) mit möglichst wenig Blech herstellen. Bestimmen Sie die Höhe h und den Radius r der Dose mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode so, daß bei gegebenem Volumen V von 1 l die Dosen eine minimale Oberfläche haben.

Hinweise: Zylindervolumen $V = h\pi r^2$, Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

Interpretieren Sie den Wert des Lagrangeschen Multiplikators.

<u>Wiederholung</u>

9.70

Am Beispiel einer einfachen Funktion sollen nun noch einmal die wesentlichen Frage- und Aufgabenstellungen des Abschnitts 9 zusammengefaßt werden.

Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 15x + 26y + 2xy$$

a) Wie lautet der Definitionsbereich von z?

b) Legen Sie für z eine Funktionstafel mit zwei Eingängen an, und zwar für $x, y \in \mathrm{Z}$ mit

$$-2 \leq x \leq 3$$
$$-2 \leq y \leq 3$$

c) Für welches Zahlenpaar (x, y) ergibt sich nach Aufgabe b)

α) das Maximum für z? β) das Minimum für z?

d) Bilden Sie <u>alle</u> partiellen Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung von z.

e) Wieviele partielle Ableitungen 8. Ordnung gibt es für z?

f) Untersuchen Sie die Funktion auf Homogenität.

g) Untersuchen Sie die Funktion im Rahmen des Definitionsbereichs auf Extremwerte und Sattelpunkte.

h) Wie Aufgabe g) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $74 = 3x + 2y$

α) mit Hilfe der Substitutionsmethode,

β) mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode.

i) Bilden Sie das totale Differential dz.

j) α) Berechnen Sie dz für $x = 3$, $y = -2$ mit $dx = 0,2$ und $dy = -0,01$

β) Berechnen Sie $\triangle z$ für $x = 3$, $y = -2$ und $\triangle x = 0,2$, $\triangle y = -0,01$ und vergleichen Sie $\triangle z$ mit dz.

k) Interpretieren Sie die Lösung von Aufgabe j) α).

l) Berechnen Sie den Gradientenvektor für z

α) im Punkte $p_1(-3; 2)$,

β) im Punkte $p_2(a; b)$ mit a, $b \in \mathrm{R}$.

m) Interpretieren Sie das Ergebnis von Aufgabe l) α).

n) Für welche Werte von (x, y) ergibt sich

$$\operatorname{grad} z = (0, 0)\ ?$$

o) Setzen Sie $z = 0$ und betrachten Sie die sich ergebende Gleichung als implizite Funktion $F(x, y) = 0$ mit x als unabhängiger und y als abhängiger Variable. Bilden Sie unter dieser Voraussetzung mit Hilfe partieller Ableitungen von z

α) y' β) y'' (als Funktion von x und y)

p) Ermitteln Sie für $z = 0$ als implizite Funktion im Sinne der vorstehenden Aufgabe die Ableitungen y' und y'' auch <u>ohne</u> partielle Ableitungen, indem Sie vorher $z = 0$ nach y auflösen und dann die üblichen Regeln der Differentialrechnung für Funktionen mit einer Variablen anwenden. Dabei ist bei der Auflösung nach y zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten nur die positive Wurzel zu verwenden.

q) α) Wie groß ist der Lagrangesche Multiplikator aus Aufgabe h) β)?

β) Interpretieren Sie diesen Zahlenwert, wenn die gegebene Funktion als Produktionsfunktion angesehen wird mit z als Output und x und y als Mengen zweier verschiedener Produktionsfaktoren X und Y. Die Nebenbedingung in Aufgabe h) bedeute eine finanzielle Grenze V für den Einsatz der Produktionsfaktoren X und Y, nämlich die zur Verfügung stehende Geldmenge in Geldeinheiten (V= 74), wobei die Faktorpreise für X und Y gleich 3 bzw. 2 GE pro ME betragen (also: $74 = 3x + 2y$).

r) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten ε_{zx} und ε_{zy}

α) allgemein als Funktion von x und y,

β) an der Stelle $(x, y) = (2; -1)$.

s) Interpretieren Sie die in Aufgabe r)β) gefundenen Werte.

10

Übungen zu Abschnitt 10: Differentialgleichungen
10.1 Beispiele und Begriffe

10.1

Man versuche eine Lösung der nachstehenden DGLen zu erraten, indem bekannte Funktionen probeweise eingesetzt werden.

a) $y' = y$ und: $y(1) = 1$ d) $y''' - y = 0$ und $y(0) = 1$

b) $f'(x) - 2xf(x) = 0$ e) $g' + g^2 = 0$

c) $(y')^2 = 4y$ f) $(y'')^2 - 1 = 0$ und $y(0) = y'(0) = 1$

10.2

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Funktionen Lösungen der rechts nebenstehenden DGLen sind.

a) $y = 2x^3 - 6x^2 + 12x$ DGL: $y' = 2x^3 - y$

b) $h(x) = (x^2 - 1)^2$ DGL: $h'(x)^2 = 16x^2h(x)$

c) $y = \frac{x^2}{c} - c$ DGL: $x - (y')^2 = 2y \cdot y' + 4x$

d) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = K^2$ DGL: $(y'')^2 \cdot K^2 = (1 + (y')^2)^3$

10.2 DGL mit trennbaren Variablen

10.3

Lösen Sie die nachfolgenden DGLen mit trennbaren Variablen.

a) $x^2y' - y + 4 = 0$ b) $y' = 4x^2 \cdot y$ c) $\frac{d}{dy}f(y) = \frac{y}{f(y)}$

d) $y' - 3x = 4x^2$ e) $y' = y \cdot \sqrt{x}$ und: für $x = 0$ sei $y = e$

f) $x\sqrt{f'(x)} = x - 1$ und: $f(2) = 10$

g) $y' = y \cdot \dfrac{x}{x^2 + 1}$ h) $y' = \dfrac{2x^2}{9y^4}$ und: für $x = 1$ sei $y = 1$

10.4

Für die folgenden DGLen berechne man die partikulären Lösungen, die durch den Punkt (1, 2) gehen.

a) $2ay' = y$ b) $y' = axy$

c) $y' = 2xy^2$ d) $x^2y' = y^2$ e) $xy' = y \, ln \, y$

Welche dieser DGLen besitzen partikuläre Lösungen, die für $x = 0$ den Anstieg 1 haben?

10.3 Lineare DGL

10.5

Bringen Sie die folgenden DGLen auf die Form

$$y' + p(x)y = r(x):$$

a) $(x+1)y' + (x-1)y - x - 1 \; = \; 0 \; ; \qquad x \neq -1$

b) $y'x + (x+1)y \; = \; x^2 - \sqrt{x} \; ; \qquad x > 0$

c) $y' + g(x) \cdot y \; = \; q(x) \cdot y^n$ (Bernoullische DGL)

Hinweis: Man substituiere $z \; = \; y^{1-n} \quad (n \neq 1)$

10.6

Lösen Sie die folgenden linearen DGLen

a) $y' + axy \; = \; 0$ b) $y' + \frac{a}{x} \cdot y \; = \; 0$ c) $y' + \frac{2x}{1+x^2} \cdot y \; = \; 0$

d) $y'(x+1) - y \; = \; 0$ für $x > 0$ e) $y' + ay \; = \; 0$

f) $y' + 4y \; = \; 1 + 2x$ g) $y' + 2y \; = \; 1 + 2x$

h) $y' + 2y \; = \; 3e^x$ i) $y' + \frac{3}{x}y \; = \; -2x^2$ für $x > 0$

j) $y' - 2xy \; = \; x \cdot e^{-x^2}$ k) $y' + \frac{2x}{x^2+1}y - 5x^4 \; = \; 0$

l) $y' + 2xy \; = \; x \cdot e^{-x^2}$ m) $y'x \; = \; y + lnx$

n) $y'x \; = \; -(x+y)$ o) $y'x \; = \; x + y$

Welche dieser DGLen haben partikuläre Lösungen, die durch den Nullpunkt gehen? Wie lautet die Lösung der homogenen DGL in den Fällen f) bis o)?

10.4 Anwendungen

10.7

Eine Nachfragefunktion $x \; = \; x(p)$ habe im Intervall $1 \leq p \leq 4$ die konstante Elastizität -2. Wie lautet $x(p)$, wenn $x = 2$ für $p = 4$ ist?

Wie lautet die Lösung, wenn bei gleicher Randbedingung die Elastizität im o.g. Intervall linear von $-\frac{7}{4}$ auf -1 ansteigen soll?

Man vergleiche beide Nachfragefunktionen.