Universität–Gesamthochschule–Paderborn
Fachbereich 17 – Mathematik

WS 2001/2002

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler A

Aufgaben zu den Abschnitten 1 bis 8

1.1 Eine Matrix besitzt 36 Elemente. Von welchem Format kann sie sein?

1.2 Wie lautet die $(4,4)$-Matrix $A = (a_{ik})$, deren Elemente durch

$$a_{ik} = \begin{cases} i+k & \text{für} \quad i > k \\ i \cdot k & \text{für} \quad i \leq k \end{cases}$$

bestimmt sind?

1.3 Wie lauten die Elemente der $(3,3)$-Matrix $A = (a_{ik})$, die der Gleichung

$$A = \begin{pmatrix} -0,3a_{11} & -(a_{23} - a_{32} + a_{11}) & a_{21} + a_{23} \\ a_{11} - a_{12} & -a_{11} & a_{12} \\ -0,3a_{11} & 1 & -a_{12} - a_{32} \end{pmatrix}$$

genügt?

1.4 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -7 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $(A - B) - C$ b) $A - (B - C)$ c) $A - B + C$

d) $2A - 3B + 6C$ e) $0,5A + 2(B - C)$ f) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$

1.5 Zwei der folgenden Matrizen sind vergleichbar. Welche sind es, und welche Relation besteht zwischen ihnen?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.6 In welchem Wertebereich müssen x und y liegen, damit für nachfolgende Matrizen A und B die Relation $A \leq B$ gilt?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & x^2 - 4x + 6 & -3 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & x & y \\ 4 & 4 & x \end{pmatrix}.$$

1.7 In drei Lagern werden vier unterschiedliche Erzeugnisse gelagert. Der Lagerbestand zu Beginn des Jahres ist durch die Matrix

$$L_o = \begin{pmatrix} 400 & 600 & 700 \\ 300 & 200 & 1000 \\ 400 & 300 & 750 \\ 600 & 200 & 800 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Elemente l_{ij} der Matrix $L_o = (l_{ij})$ geben an, wieviel Einheiten des Erzeugnisses i im Lager j liegen. Es ist geplant, im Laufe des Jahres den Lagern fünfmal die Mengen a_{ij} (a_{ij} ist Element der Matrix $A = (a_{ij})$) und dreimal die Mengen b_{ij} (b_{ij} ist Element der Matrix $B = (b_{ij})$) zu entnehmen.

a) Welche Beziehung muß zwischen L_o, A und B bestehen?

b) Überprüfen Sie, ob diese Bedingung verletzt wird, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 80 & 100 \\ 20 & 24 & 80 \\ 60 & 50 & 30 \\ 60 & 40 & 40 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 200 \\ 30 & 15 & 200 \\ 100 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

ist.

c) Wie stark dürfte a_{23} anwachsen, wenn ansonsten die oben genannten Werte beibehalten werden?

d) Man berechne die Lagerrestbestände.

1.8 Folgende Matrizen sind miteinander zu multiplizieren.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Reihenfolge ist dabei möglich?

1.9 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die folgenden Ausdrücke, soweit diese gebildet werden können.

a) AC b) CA c) AB d) BD e) $(A+B)C$

f) $(A-D)C$ g) $(A+B)D$ h) $D(A-B)$ i) $(A+B)\cdot(C-D)$.

1.10 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie $A+B, (A+B)^2, AB, A^2, B^2$.
Überprüfen Sie, ob die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auch für diese Matrizen gilt.

1.11 Wie lautet das Produkt ABC der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und in welcher Reihenfolge sind sie zu multiplizieren, damit der Rechenaufwand möglichst gering ist?

1.12 In welcher Reihenfolge sollten die Multiplikationen des Matrizenprodukts $P = ABCD$ ausgeführt werden, wenn A aus 1 Zeile und 100 Spalten, B aus 100 Zeilen und 1000 Spalten, C aus 1000 Zeilen und 20 Spalten und D aus 20 Zeilen und 200 Spalten bestehen und Sie mit möglichst wenig Rechenoperationen auskommen wollen?

1.13 Ein Betrieb stellt drei Erzeugnisse her, die auf vier Maschinen bearbeitet werden. Die Maschinenzeit je Erzeugniseinheit, die Maschinenzeitfonds und die Produktionsmenge sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

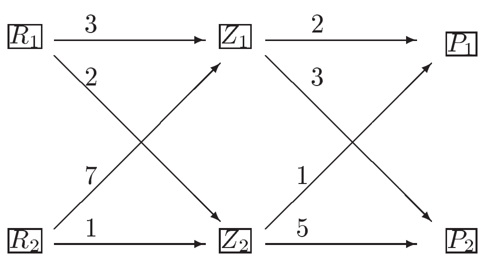
Maschine	Maschinenzeit			Maschinenzeitfonds in Zeiteinheiten
	1	2	3	
1	3	7	2	1000
2	1	4	3	1200
3	2	3	5	1500
4	6	1	4	1900
Produktionsmenge	x_1	x_2	x_3	

a. Führen Sie eine Matrix A für die benötigte Maschinenzeit je Erzeugniseinheit, einen Spaltenvektor $\underline{f}$ für die Maschinenzeitfonds und einen Spaltenvektor $\underline{x}$ für die Produktionsmenge ein!

b. Wie errechnet man die verbrauchte Maschinenzeit?

c. Welche Bedingungen muß der Vektor x erfüllen?

1.14 Gegeben seien der Gozintograph einer zweistufigen Produktion:



sowie ein Produktionsprogramm $\underline{p}^T = (10, 12)$.

a) Stellen Sie die Matrizen V^{01} und V^{12} auf, die den direkten spezifischen Materialverbrauch beim Übergang von Stufe 0 zu Stufe 1 bzw. von Stufe 1 zu Stufe 2 beschreiben.

b) Ermitteln Sie die Vektoren $\underline{z}$ und $\underline{r}$ der für die Endproduktion $\underline{p}$ benötigten Zwischenprodukte bzw. Rohstoffe.

1.15 Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen vier Erzeugnisse her. Der Verbrauch an Rohstoff je Erzeugniseinheit ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Rohstoff	Rohstoffbedarf (in Mengeneinheiten) je Einheit des Erzeugnisses			
	1	2	3	4
1	6	2	3	7
2	1	15	2	3
3	4	6	9	12

Man interessiert sich für folgende Fragen:

a) Wie hoch ist der Rohstoffverbrauch, wenn von jedem Erzeugnis eine Einheit hergestellt wird?

b) Wie hoch ist der Rohstoffverbrauch, wenn vom Erzeugnis $j = 1, 2, 3, 4$ die Menge $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4$ und $x_4 = 0$ Einheiten hergestellt werden?

c) Wie hoch sind die gesamten Rohstoffkosten in den Fällen a) und b), wenn die 3 Rohstoffe 102, 21 bzw. 7 Geldeinheiten je Mengeneinheit kosten?

d) Was kostet jeweils eine Einheit der Erzeugnisse 1 bis 4?

Beantworten Sie diese Fragen, indem Sie für die gegebenen und gesuchten (skalar-, matrix- oder vektorwertigen) Größen geeignete Bezeichnungen einführen und diese durch Gleichungen miteinander verknüpfen.

1.16 **(*)** Gegeben seien die Matrizen
$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,q}}$ und $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,q\\ j=1,\dots,p}}$.
Läßt sich das Matrizenprodukt $D := ABC$ bilden? Wenn ja, gebe man eine Formel für das Element d_{ij} von D an.

1.17 Es sind die Matrizen X bzw. Y und X zu berechnen

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ in a) - g)

a) $AXA^{-1} = I$

b) $(A - X) \cdot B = I$

c) $(2B + X \cdot B) = A \cdot X \cdot B$

d) $A \cdot B - B \cdot X = 2 \cdot (A - B) \cdot X - A \cdot X$

e) $A + (A^{-1}(XB))^{-1} = 2A$

f) $(A - B) + A^{-1} \cdot X = I$

g) $2X - (A + B)^2 X = I - CX$

h) $A(X - 2I) = A(3I - X)B + (AX + B)$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

i) (1) $X + XB + YB + I = N$
(2) $2XA + 2YA - B = N$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1.18 Lösen Sie die folgende Materialverflechtungsaufgabe mit Hilfe der Matrizenrechnung:

Der Materialfluß in einem Betrieb läuft von vier eingesetzten Rohstoffen ($R_1, \ldots, R_4$) über drei Zwischenprodukte ($X_1, \ldots, X_3$) zu den vier Endprodukten ($Z_1, \ldots, Z_4$).

Der Materialfluß je Produktionseinheit der empfangenden Stufe wird durch Kleinbuchstaben der abgegebenen Stufe bezeichnet. Der erste Index gibt die Herkunft der abgebenden Stufe an, der letzte Index die Verwendung in der empfangenden Stufe. Übersprungene Produktionsstufen werden durch den dazwischengestellten Index Null (0) bezeichnet.

Zum Beispiel:

r_{11} ist der Materialverbrauch an R_1 für die Herstellung einer Einheit X_1.
r_{102} ist der Materialverbrauch an R_1 für die Herstellung einer Einheit Z_2 (unter Überspringung der Stufe X).

Folgende Werte sind gegeben:

$$\begin{array}{lllll} r_{11}=2 & r_{101}=4 & x_{11}=1 & x_{21}=1 & x_{32}=1 \\ r_{21}=3 & r_{102}=1 & x_{12}=2 & x_{22}=3 & x_{33}=2 \\ r_{32}=1 & & x_{13}=3 & x_{24}=4 & x_{34}=5 \\ r_{42}=4 & & x_{14}=4 & & \\ r_{43}=3 & & & & \end{array}$$

Alle nicht genannten Werte sind Null (0).

a) Zeichnen Sie einen sog. Gozintographen, d.h. ein Diagramm des Materialflusses.

b) Stellen Sie die Materialverflechtung durch geeignete Matrizen dar.

c) Welcher Rohstoffverbrauch ergibt sich pro Einheit des Fertigproduktes $Z_i (i = 1, 2, 3, 4)$?

1.19 Welche Rohstoffmengen sind in Aufgabe 18 bereitzustellen, wenn folgende Produktion das Werk verlassen soll?

$$\begin{array}{ll} X_1 = 100 & Z_1 = 200 \\ X_2 = 200 & Z_2 = 100 \\ X_3 = 400 & Z_3 = 100 \\ & Z_4 = 100 \end{array}$$

1.20 Wir betrachten einen Betrieb, der aus Einzelteilen $T_1, \ldots, T_4$ zunächst Baugruppen B_1, B_2, B_3 montiert und diese dann zu zwei Enderzeugnissen E_1, E_2 verarbeitet.

Baugruppe 1 besteht aus 7 Einzelteilen, und zwar aus je 3 Teilen T_1 und T_4 und dem Rest T_2.

Ebenso besteht Baugruppe 3 aus 7 Einzelteilen. Man benötigt hierfür einen Teil T_4 mehr, dafür aber keinen Teil T_1. Ferner werden 2 Teile T_2 benötigt, den Rest benötigt man von T_3.

Baugruppe 2 benötigt je 2 Teile T_1 und T_4, 4 Teile T_3 und 5 Teile T_2.

In das Enderzeugnis E_1 geht die Baugruppe B_3 gar nicht ein; dafür benötigt man 3 Teile B_2 und 4 Teile B_1.

Für Enderzeugnis E_2 benötigt man insgesamt 8 Teile: 2 Teile der Baugruppe B_3, einen Teil der Baugruppe B_2 und den Rest an Baugruppe B_1.

Berechnen Sie die Anzahl an Einzelteilen, die für die Produktion eines Endprodukts 1 bzw. 2 nötig sind!
Stellen Sie dazu obige Informationen zuerst möglichst übersichtlich dar!

1.21 Ein Unternehmen produziert aus 3 Rohstoffen R_1, R_2, R_3 zwei Produkte P_1 und P_2, wobei zunächst 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt werden.

(M1) Je ME P_1 werden 2 ME Z_1 und 3 ME Z_2,
je ME P_2 werden 14 ME Z_1 und 20 ME Z_2,

je ME Z_1 werden 10 ME R_1, 4 ME R_2 und 1 ME R_3 sowie
je ME Z_2 werden 2 ME R_2 und 5 ME R_3
benötigt.

(M2) Wie (M1); es werden jedoch je ME P_1 zusätzlich 8 ME R_3 direkt verarbeitet.

(M3) Wie (M2); zusätzlich werden 0.02 ME P_1 je ME Z_1 benötigt.

Aufgabe:

I) Geben Sie die Gozintographen für die Fälle (M1) bis (M3) an.

II) Stellen Sie in den Fällen, in denen es sinnvoll ist (Begründung!), ein mehrstufiges Materialflußmodell auf.

III) Geben Sie für (M1) bis (M3) jeweils ein komplexes Materialflußmodell an.

Hinweis zu II) und III):
Nennen Sie die in den jeweiligen Modellen auftretenden Matrizen und Vektoren sowie deren Bedeutung und geben Sie die Beziehungen an, die zwischen ihnen bestehen müssen, damit die Produktion realisierbar ist. Welche Größen geben bei realisierbarer Produktion die Mengen an absetzbaren Endprodukten bzw. nicht benötigten Rohstoffen oder Zwischenprodukten an?

IV) Geben Sie eine Formel an, mit der in den Fällen (M1) und (M2) der Materialbedarf an R_1, R_2 und R_3 ermittelt werden kann, wenn p_1 Einheiten an P_1 und p_2 Einheiten an P_2 produziert werden sollen.

V **(ECOMP)** Wie lauten die zahlenmäßigen Ergebnisse des vorigen Punktes, wenn

a) 1.000 ME an P_1 und 2.000 ME an P_2 produziert werden sollen,

b) darüber hinaus noch 400 ME Z_1 an einen Partnerbetrieb abgegeben werden sollen?

1.22 **(ECOMP)** Ein Unternehmen stellt aus 2 Rohstoffen R_1 und R_2 über zwei Zwischenstufen, in deren erster 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und in deren zweiter ein Hilfeprodukt H_1 entstehen, zwei Endprodukte P_1 und P_2 her.

Der direkte Materialverbrauch zur Produktion von je 1 ME

Z_1	an	R_1	beträgt	2 ME,
Z_1	an	R_2	beträgt	1 ME,
Z_2	an	R_1	beträgt	1 ME,
Z_2	an	R_2	beträgt	2 ME,
H_1	an	Z_1	beträgt	3 ME,
P_1	an	Z_1	beträgt	2 ME,
P_1	an	Z_2	beträgt	1 ME,
P_1	an	H_1	beträgt	1 ME,
P_2	an	H_1	beträgt	1 ME,
P_2	an	Z_2	beträgt	3 ME.

a) 1) Geben Sie den Gozintographen für den Materialfluß an.

2) Stellen Sie ein (komplexes) Materialflußmodell auf.

3) Welche Mengen an Rohstoffen R_1 und R_2 sowie Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 müssen hergestellt werden, um eine absetzbare Produktion von 250 ME P_1 und 100 ME P_2 herzustellen?

b) Wie lauten die Antworten zu a), wenn zusätzlich noch ein Materialverbrauch von 4 ME R_2 je ME P_2 und von 1/4 ME P_2 je ME Z_1 entstehen?

c) Welche Produktion ist in den Fällen a) und b) erforderlich, wenn zusätzlich 20 ME Z_2 und 5 ME H_1 in den Verkauf gebracht werden sollen?

1.23 Die Produktion aus 1.14 soll nun im Hinblick auf die entstehenden spezifischen und absoluten Rohstoffkosten untersucht werden. Die Rohstoffe R_1 und R_2 mögen derzeit zu konstanten Preisen π_1^0 [GE/ME] und π_2^0 [GE/ME] erhältlich sein. Da die spezifischen Verbrauchswerte bekannt sind, lassen sich die spezifischen Rohstoffkosten (d.h. die Rohstoffkosten je erzeugter Mengeneinheit Zwischen- bzw. Endproduktion) ermitteln. Es bezeichne
π_1^1 die Rohstoffkosten zur Erzeugung einer ME Z_1 (in [GE])
π_2^1 die Rohstoffkosten zur Erzeugung einer ME Z_2 (in [GE])
π_1^2 die Rohstoffkosten zur Erzeugung einer ME P_1 (in [GE])
π_2^2 die Rohstoffkosten zur Erzeugung einer ME P_2 (in [GE]), sowie

$\underline{\pi}^0 := (\pi_1^0, \pi_2^0)^T$, $\underline{\pi}^1 := (\pi_1^1, \pi_2^1)^T$, $\underline{\pi}^2 := (\pi_1^2, \pi_2^2)^T$

Weiterhin bezeichne $K := K(\underline{\pi}^0, \underline{p})$ die (absoluten) Gesamtrohstoffkosten zur Erzeugung des Produktionsprogrammes $\underline{p}$ bei den geltenden Rohstoffpreisen $\underline{\pi}^0$.

I) Stellen Sie den Zusammenhang
   i) zwischen $\underline{\pi}^0$ und $\underline{\pi}^1$
   ii) zwischen $\underline{\pi}^1$ und $\underline{\pi}^2$
   iii) zwischen $\underline{\pi}^0$ und $\underline{\pi}^2$

   unter Verwendung der Matrizen V^{01}, V^{12} und $V := V^{01}V^{12}$ formelmäßig dar.

II) Geben Sie eine Formel zur Bestimmung von $K = K(\underline{\pi}^0, \underline{p})$ aus vorgegebenen Vektoren $\underline{\pi}^0$ und $\underline{p}$ an.

III) Ermitteln Sie $\underline{\pi}^1$ und $\underline{\pi}^2$ für den Fall $\underline{\pi}^0 = (3; 8)^T$.

IV) Wie groß sind die absoluten Rohstoffkosten zur Herstellung des Programms $\underline{p} = (10, 12)^T$?

2.1 Bilden Sie mit den Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\underline{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ die Summen

a) $\underline{p}\underline{q}^T + \underline{a}\underline{b}^T$ b) $\underline{q}^T\underline{p} + \underline{b}^T\underline{a}$

2.2 Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aus Aufgabe 1.
Bestimmen Sie

a) $\underline{r} = 3\underline{a} - 2(\underline{b} + 2\underline{c})$ b) $\underline{s} = -4\underline{a} + 5\underline{c} + \underline{b}$ c) $\underline{t} = \underline{r} + \underline{s}$

2.3 Man gebe drei Vektoren an, die im dreidimensionalen Raum ein Dreieck bilden.
Welcher algebraische Zusammenhang besteht zwischen diesen Vektoren?

2.4 Für die durch die Punkte $P_1 = (1; 1)$ und $P_2 = (3; 5)$ des $\mathbb{R}^2$ verlaufende Gerade gebe man

a) eine Funktionsgleichung,
b) eine Parameterdarstellung,
c) eine Geradengleichung in Normalenform,
d) **(Z)** eine Geradengleichung in Hessescher Normalform an.

2.5 **(Z)** Ausgehend vom Koordinatenursprung werde auf die in Aufgabe 4 bestimmte Gerade das Lot gefällt.

a) Wie lang ist das Lot?

b) Welche Koordinaten hat der Lotfußpunkt?

2.6 Durch die Punkte $P_1 = (-6; 4; 1), P_2 = (1; -2; 2)$ und $P_3 = (3; -8; -2)$ des $I\!R^3$ wird eine Ebene E bestimmt. Geben Sie je eine Ebenengleichung an in

a) Funktionsdarstellung

b) Parameterdarstellung

c) Normalenform

d) **(Z)** Hessescher Normalform.

e) **(Z)** Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung von der Ebene E?

f) **(Z)** Welcher Punkt der Ebene E liegt dem Koordinatenursprung am nächsten?

2.7 Untersuchen Sie jede der nachfolgenden Aussagen auf Richtigkeit (= Allgemeingültigkeit).
(Richtige Aussagen sind zu begründen, falsche durch geeignete Gegenbeispiele zu widerlegen.)

Es seien $\mathcal{M}$ ein linearer Raum, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in \mathcal{M}$.

(i) Die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der übrigen darstellen läßt.

(ii) Die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich höchstens einer von ihnen als Linearkombination der übrigen darstellen läßt.

(iii) Wenn die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, läßt sich einer von ihnen als nichttriviale Linearkombination der übrigen darstellen.

(iv) Die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination der übrigen darstellen läßt.

(v) Wenn $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, läßt sich mindestens einer dieser Vektoren als nichttriviale Linearkombination der übrigen darstellen.

(vi) Wenn die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, läßt sich jeder von ihnen als Linearkombination der übrigen darstellen.

(vii) Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ ist notwendig dafür, daß der Nullvektor 0 nicht unter diesen vorkommt.

(viii) Kommt der Nullvektor 0 unter $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vor, sind diese linear abhängig .

(ix) Zwei Vektoren $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ sind genau dann linear unabhängig , wenn keiner ein Vielfaches des anderen ist.

(x) Kommt der Nullvektor 0 unter den ersten $n-1$ Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}$ vor, können $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ nicht linear unabhängig sein.

(xi) Kommt (im Fall $n \geq 3$) der Nullvektor 0 unter den ersten $n-1$ Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}$ vor, können höchstens $n-2$ der Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear unabhängig sein.

(xii) Der Vektor $\underline{a}_1$ ist genau dann linear unabhängig , wenn $\underline{a}_1 \neq 0$ gilt.

(xiii) Falls $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, muß $dim \mathcal{M} < n$ gelten.

(xiv) Falls $dim \mathcal{M} < n$ gilt, sind $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ notwendig linear abhängig .

2.8 Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Vektoren linear unabhängig sind oder nicht.

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2,5 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2.9 Stellen Sie in den Fällen, in denen die Vektoren der vorangegangenen Aufgabe linear abhängig sind, jeweils einen der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dar.

2.10 Bestimmen Sie sämtliche Variablen x, z, u, v, w in den gegebenen Vektoren so, daß diese Vektoren linear abhängig sind.

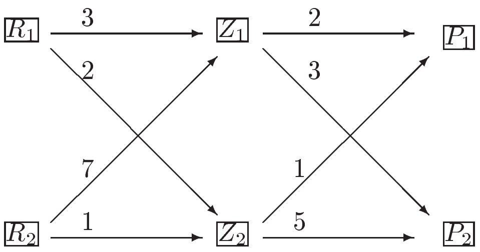
a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ z \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ v \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} u+v \\ 12 \\ 3 \\ v-w \end{pmatrix}$

2.11 Bestimmen Sie die Variablen u, v und w in den folgenden drei Vektoren so, daß diese Vektoren linear abhängig sind.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ v \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} u+v \\ 12 \\ 3 \\ v-w \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.12 In Aufgabe 1.14 wurde der folgende Gozintograph einer zweistufigen Produktion betrachtet:



Es waren Matrizen V^{01} und V^{12} sowie Vektoren $\underline{z}$ und $\underline{r}$ eingeführt worden, die den direkten spezifischen Materialverbrauch beim Übergang von Stufe 0 zu Stufe 1 bzw. von Stufe 1 zu Stufe 2 sowie die erforderlichen absoluten Mengen an Zwischenprodukten und Rohstoffen beschreiben.

a) Zeigen Sie, daß

i) die Spalten von V^{01} eine Basis $\underline{\underline{b}} = (\underline{b}^1, \underline{b}^2)^T$
ii) die Spalten von V^{12} eine Basis $\underline{\underline{c}} = (\underline{c}^1, \underline{c}^2)^T$
iii) die Spalten von $V := V^{01}V^{12}$ eine Basis $\underline{\underline{d}} = (\underline{d}^1, \underline{d}^2)^T$

des $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Geben Sie die Koeffizienten von
i) $\underline{z}$ bezüglich $\underline{\underline{c}}$
ii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{b}}$
iii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{d}}$

an und interpretieren Sie diese ökonomisch.

2.13 **(Z)** Es werde der Raum $M := \mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b})$ betrachtet mit

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine Orthonormalbasis $\underline{u}, \underline{v}$ von M (d.h., eine Basis $\underline{u}, \underline{v}$ mit den Eigenschaften $\underline{u} \perp \underline{v}$ und $||\underline{u}|| = ||\underline{v}|| = 1$)?

- Falls JA, geben Sie eine solche Basis $\underline{u}, \underline{v}$ an (dabei ist nachzuweisen, daß es sich um eine Orthonormalbasis von M handelt);
- falls NEIN, zeigen Sie, daß eine solche Basis nicht existieren kann!

2.14 **(*)** Die Vektoren $\underline{a}^1$ und $\underline{a}^2$ mögen eine Basis der $\mathbb{R}^2$ bilden, und es gelte

$$\begin{array}{ccccc} \underline{b}^1 & = & b_{11}\underline{a}^1 & + & b_{12}\underline{a}^2 \\ \underline{b}^2 & = & b_{21}\underline{a}^1 & + & b_{22}\underline{a}^2 \end{array}$$

mit $b_{12} \neq 0$.

(i) Bilden auch die Vektoren $\underline{a}^1$ und $\underline{b}^1$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$? (Begründung!)

(ii) Falls die Antwort zu (i) JA lautet, d.h., $\underline{a}^1$ und $\underline{b}^1$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, muß sich der Vektor $\underline{b}^2$ in der Form

$$\underline{b}^2 = \alpha \underline{a}^1 + \beta \underline{b}^1$$

darstellen lassen, wobei die Koeffizienten α und β eindeutig bestimmt sind. Geben Sie Formeln an, in denen α und β durch $b_{11}, \ldots, b_{22}$ ausgedrückt werden.

2.15 Welche der folgenden Mengen sind lineare Teilräume von $\mathbb{R}^{n,n}$?

i) Die Menge M_1 oberer $n \times n$-Dreiecksmatrizen

ii) $M_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \geq 0\}$

iii) $M_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid a_{11} > a_{nn}\}$

iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$

v) $M_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid a_{11} + a_{nn} = 0\}$

(Begründung!)

2.16 Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen die Inversen, sofern diese existieren.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ i) $J = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2.17 Es sei das Modell einer volkswirtschaftlichen Verflechtung gegeben mit dem Produktionsvektor $\underline{x}$, dem Endverbrauchsvektor $\underline{y}$ und der Matrix A des direkten Verbrauchs gegeben. Es gelte die Bilanzgleichung

$$\underline{x} = A \cdot \underline{x} + \underline{y}$$

Man berechne die Produktion $\underline{x}$ in Abhängigkeit von $\underline{y}$. Die Matrix A ist gegeben mit:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2.18 **(*)** Ein Unternehmer läßt ein und dasselbe Produkt P in n Zweigwerken produzieren. Obwohl theoretisch in allen Zweigwerken dieselben Stückkosten k auftreten müßten, wurden aufgrund geringfügiger (zufälliger) störender Einflüsse in den Zweigwerken die konkreten Stückkosten $k_1, \ldots, k_n$ festgestellt. Ermitteln Sie die theoretische Größe k so, daß der theoretische Stückkostenvektor $k(1, \ldots, 1)^T$ möglichst “nahe” beim beobachteten Stückkostenvektor $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)^T$ liegt.

(Hinweis: Die Aufgabe läßt sich geometrisch lösen, wobei es zweckmäßig ist, sich den Sachverhalt zunächst für den Fall $n = 2$ klarzumachen.)

3.1 Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 6 & 17 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \\ -2 & -8 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 13 & 19,5 & -26 \\ 11 & 16,5 & -22 \end{pmatrix}$

3.2 Man bestimme den Rang der sog. Transportmatrix T

a) für den Fall von 5 Zeilen und 6 Spalten

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) im allgemeinen Fall von $(k + l)$ Zeilen und $(k \cdot l)$ Spalten.

3.3 Man bestimme den Rang der folgenden Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A, I)$$

Wie wirkt sich die Teilmatrix A auf den Rang aus?

3.4 Bestimmen Sie die Werte von b, für die das folgende Gleichungssystem Lösungen besitzt, und geben Sie die zugehörige(n) Lösung(en) an:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z & = & b^2 \\ x & & & + & z & = & 1-b \\ x & - & y & - & 2z & = & b \end{array}$$

3.5 Stellen Sie fest, für welche Werte von u das Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar ist, und geben Sie die zugehörige(n) Lösung(en) an:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -12 \\ u \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -u \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

3.6 Prüfen Sie die Lösbarkeit der nachstehenden Gleichungssysteme durch Rangbetrachtung und bestimmen Sie die Lösung, falls eine solche existiert.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 8x_2 & + & 9x_3 & = & -32 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 22 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 24 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 8 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 13x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 26 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 43 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 16 \end{array}$$

3.7 Lösen Sie die Gleichungssysteme $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & -10 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ -42 \\ 63 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ 14 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3.8 a) Man gebe an, wann in den Aufgaben 3.5, 3.6 und 3.7 auch eine nichttriviale Lösung für das jeweils entsprechende homogene LGS existiert.

b) Falls solche Lösungen existieren, berechne man sie.

3.9 Lösen Sie mit Hilfe des Austauschverfahrens folgende Gleichungssysteme:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 28 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 14 \end{aligned}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 15 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}$ d) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \end{array}$

3.10 Gegeben seien die Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 30 \end{pmatrix} \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -56 \end{pmatrix}$$

a) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombinationen der restlichen darstellen?

b) Geben Sie zu jedem der unter a) genannten Vektoren sämtliche Möglichkeiten an, diese als Linearkombination der restlichen darzustellen.

Hinweis: Es ist zweckmäßig, das Austauschverfahren einzusetzen.

3.11 Für die Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Betrieb zwei verschiedene Materialarten. Der Mengenbedarf und -vorrat ist in der Tabelle gegeben.

Material	E1	E2	E3	Materialvorrat
M1	2	1	2	240
M2	3	0	2	230

Wieviele Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit das gesamte Material verbraucht wird?

a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dem die gesuchten Ergebnismengen notwendigerweise genügen, und bestimmen Sie dessen allgemeine Lösung (Parameterdarstellung).

b) Stellen Sie die unter (a) gefundene Lösungsmenge graphisch dar.

c) Kennzeichnen Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsteilmenge
– in Form einer Parameterdarstellung
– graphisch.

d) Stellen Sie fest, ob ganzzahlige Lösungen des Problems existieren, und geben Sie ggf. eine Parameterdarstellung dafür an.

e) Welche (ganzzahligen) Erzeugnismengenkombinationen ergeben eine maximale bzw. minimale Gesamterzeugnismenge?

3.12 Für die Herstellung eines Erzeugnisses nach zwei Technologien stehen zwei Materialien zur Verfügung. Bei der ersten Technologie werden 40 Mengeneinheiten (ME) des ersten und 50 ME des zweiten Materials benötigt, bei der zweiten Technologie 65 ME des ersten und 30 ME des zweiten Materials. Der Betrieb hat einen Materialvorrat von 3600 ME beim ersten und 2450 ME beim zweiten Material. Wieviel Einheiten sind nach den verschiedenen Technologien herzustellen, wenn das Material voll verbraucht werden soll?

3.13 Zwei Aktienhändler bieten Aktienpakete zum Verkauf an. Der erste bietet ein Paket an, das 10 Aktien der Firma A, 40 der Firma B und 100 der Firma D enthält. In einem Paket des zweiten Händlers befinden sich 50 Aktien der Firma A, 30 der Firma B, 40 der Firma C und 20 der Firma D. Ein Kunde möchte gerne 130 Aktien der Firma A, 180 der Firma B, 80 der Firma C und 340 Aktien der Firma D erwerben. Ist es ihm möglich, die gewünschte Anzahl von Aktien durch den Ankauf der beiden verschiedenen Sorten Aktienpakete — eventuell von jedem Paket eine gewisse Anzahl — zu bekommen, oder muß er die Aktien einzeln erwerben?

3.14 Ein Gewürzhändler bietet zwei verschiedene Gewürzmischungen an, die er in 10g-Päckchen verkauft. Ein Päckchen der Mischung A enthält 2g Gewürz 1, 3g Gewürz 2 und 5g Gewürz 3. Ein Päckchen der Mischung B enthält 4g Gewürz 1 und je 3g Gewürz 2 und 3.

Ein Kunde benötigt eine Gewürzmischung, die zu je 3 Teilen Gewürz 1 und 2 enthält und zu 4 Teilen aus Gewürz 3 besteht. Von dieser Mischung benötigt er 200g. Kann er die angebotenen Gewürzmischungen so kombinieren, daß er exakt die benötigte Menge seiner eigenen Mischung erhält?

3.15 Ein Bastler benötigt für ein Radio noch diverse elektronische Einzelteile:

	3	positive Festspannungsregler 7805
	13	Verstärker ICs, TBA 820
und	4	Spulen 40 μH.

Ein elektronisches Versandhaus bietet einen Bausatz an, der einen Festspannungsregler, 5 Verstärker ICs und 4 Spulen enthält. Ein Geschäft am Ort verkauft einen Verstärker IC nur dann, wenn man noch genau vier Spulen dazukauft.

Kann der Bastler die beiden verschiedenen Bausätze so kombinieren, daß er keine Bauteile zuviel hat?

3.16 Eine Vermögensanlagegesellschaft bietet dem Anleger an, mit Einzahlungen in jeweils beliebiger Höhe Anteile an drei Portefeuilles zu erwerben, die ausschließlich aus den 4 Standardwerten A, B, C und D zusammengesetzt sind. Im Portefeuille P_1 beträgt der wertmäßige Anteil der Papiere $A - D$ 60%, 10%, 20% und 10%, in P_2 40%, 20%, 20% und 20% sowie in P_3 50%, 30%, 10% und 10%.

a) Ein Anleger hätte gern einen bestimmten Geldbetrag zu 54%, 16%, 18% und 12% in den Werten A bis D angelegt. Ist dies durch Erwerb von Anteilen von P_1 bis P_3 möglich?
Wenn ja, wie muß der Anleger seinen Geldbetrag prozentual auf die Portefeuilles aufteilen?

b) Würde es eventuell genügen, ausschließlich Anteile an P_1 und P_3 zu erwerben?

c) Ein Anleger möchte die Papiere A, B, C und D im Gesamtwert von 66, 4, 22 und 8 TDM erwerben, sein Geschäftspartner im Wert von 18, 10, 6 und 6 TDM. Können beide ihr Ziel erreichen, indem

c1) jeder für sich Anteile an P_1, P_2 und P_3 erwirbt?

c2) beide zusammen Anteile an P_1, P_2 und P_3 erwerben und sich untereinander über die Eigentumsrechte einigen?

Wenn ja, wie ist (jeweils) zu verfahren?

3.17 Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß diese Punkte in einer Ebene liegen.

b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in Parameter- und Funktionsdarstellung.

c) Zeigen Sie : die vier Punkte bilden ein Parallelogramm.

d) Bestimmen Sie die Spurgerade der Ebene in der xy-Ebene in Parameter-, Funktions- und Abschnittsdarstellung.

e) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene mit

$$E' = \left\{ \underline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in I\!R \right\}.$$

3.18 Eine Bäckerei verbackt Roggen-, Weizen-, Gersten- und Hafermehl zu den Brotsorten A „Helles Vierkorn“, B „Dunkles Vierkorn“ und C „Naturliebe“. Die darin je Brotlaib enthaltenen Mengen [in 100g] der genannten Mehlsorten x_1 bis x_4 sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	x_1	x_2	x_3	x_4
A	2	6	1	1
B	5	2	2	1
C	0	1	3	3

Zu Beginn der Woche vor den Betriebsferien stehen noch folgende Mengen y_i an Mehlsorte x_i zur Verfügung:
a) $y_1 = 77$, $y_2 = 154$, $y_3 = 115,5$ und $y_4 = 107,5$ [Zentner]
b) $y_1 = 50$, $y_2 = 100$, $y_3 = 110$ und $y_4 = 80$ [Ztr.]
c) $y_1 = 192,5$, $y_2 = 15,4$, $y_3 = 57,75$ und $y_4 = 14,95$ [Ztr.]
Untersuchen Sie, ob die bestehenden Mehlvorräte durch das Backen geeigneter Stückzahlen der genannten Brotsorten aufgebraucht werden können.

3.19 a) Gegeben sind die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4x \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}$ und $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$.

Welche Bedingungen muß x erfüllen, damit $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ linear unabhängig sind?

b) Stellen Sie den Vektor $\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

c) Bestimmen Sie einen Vektor $\underline{e}_1$, so daß $\underline{e}_1$ den durch $\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$ und $\underline{c}_1$ gegebenen Streckenzug schließt.

3.20 Gegeben seien die Geraden $g_1 = \left\{ \underline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}$ und

$g_2 = \left\{ \underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}$.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden.

b) Berechnen Sie die Spurpunkte S_1 und S_2 in der xy-Ebene.

c) (***) Berechnen Sie die Projektionen von g_1 und g_2 in die xy-Ebene in Funktionsdarstellung sowie deren Schnittpunkt S'.

d) (***) Wie lautet die Gleichung der Geraden durch S' parallel zu g_1?

4.1 Entwickeln Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) nach der zweiten Zeile.

b) nach der vierten Spalte.

4.2 Berechnen Sie nach dem Entwicklungssatz (unter Benutzung vereinfachender Rechenregeln) die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 & -0,2 \\ 0,7 & 0,5 & -0,2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

4.3 Berechnen Sie x aus folgenden Gleichungen:

a) $\begin{vmatrix} x & 4 & x \\ -2 & x & 2 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = a$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & x \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 12 - x$

Welche Werte kann a annehmen?

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & -x & 2 \\ 9 & 4 & x & 2 \\ 12 & -2 & x & 4 \end{vmatrix} + 150 = 0$ d) $\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4.4 a) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck in der xy-Ebene mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(2;1)$ und $(1;2)$?

b) Welchen Rauminhalt hat ein Parallelepiped, das aus den Vektoren

$\underline{a}^T = (4,4,0)$, $\underline{b}^T = (-2,2,0)$, $\underline{c}^T = (0,0,5)$ aufgespannt wird?

(Berechnen Sie den Inhalt mit Hilfe von Determinanten und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch elementare zeichnerisch-rechnerische Lösung!)

4.5 Man beweise für ein durch die drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ und (x_3, y_3) gegebenes Dreieck die Flächenformel $F = |h|$ mit:

$$h = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Hinweis: Man lege den Koordinatenursprung in einen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks.

4.6 Man beweise für Determinanten 2ter Ordnung die folgende Gleichung:
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

4.7 **(*)** Es seien b^1, b^2 und b^3 Vektoren aus $I\!R^3$, und es gelte $\det(\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3) = 5$.
a) Bestimmen Sie den Wert der Determinante $\det(\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3)$, wenn gilt
$\underline{a}^1 = 4\underline{b}^1 - \underline{b}^2 + \underline{b}^3$
$\underline{a}^2 = 10\underline{b}^2 - 2\underline{b}^3$
$\underline{a}^3 = -\underline{b}^1 + \underline{b}^2 + \underline{b}^3$.
(Hinweis: Geschickte Anwendung der Rechenregeln für Determinanten spart Arbeit!)
b) Bestimmen Sie den Wert der Determinante $\det(\underline{b}^2 - \underline{b}^1, \underline{b}^3, \underline{b}^1 + \underline{b}^3)$.

4.8 (*) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Definition der Determinante, daß für eine beliebige $n \times n$-Matrix A gilt:
$\det A \neq 0 \Leftrightarrow rgA = n$.

4.9 Zeigen Sie anhand passender Beispiele, daß die Gleichung
$\det(A + B) = \det A + \det B$
gelten kann, aber nicht zu gelten braucht.

4.10 **(Z)** Eine Zahl λ heißt Eigenwert der Matrix $A \in I\!R^{n,n}$, wenn gilt
$\det(A - \lambda I) = 0$.
Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4.11 **(*)** Gegeben seien zwei 2×2-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$, sowie die Werte

$a = \det A, b = \det B, c = \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $d = \det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Kann man $\det(A + B)$ aus den Werten a, b, c und d berechnen? (Wenn ja, gebe man eine Formel an!)

5.1 Stellen Sie die Erfüllungsmengen folgender linearer Ungleichungssysteme (LUS) graphisch dar.

a) $\begin{array}{rcl} x - y & \leq & 4 \\ x + y & \geq & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}$
b) $\begin{array}{rcl} -2x + y & \geq & 2 \\ 3x + 4y & \geq & 12 \\ x + y - 6 & \leq & 0 \end{array} \quad x, y \geq 0$

c) $\begin{array}{rcl} x + 5y & \leq & 10 \\ 3x - 5y & \geq & 15 \\ 4x + 5y & \geq & 20 \end{array}$
d) $(2x + y \leq 4$ <u>und</u> $x, y \geq 0)$
<u>oder</u>
$(x + 2y \leq 4$ <u>und</u> $x, y \geq 0)$

Welche der Erfüllungsmengen sind beschränkt, welche konvex und welche beides?

5.2 Die Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 4x - 7y + 28 & = & 0 \\ 2x + 6y - 9 & = & 0 \\ -x - 2y + 5 & = & 0 \end{array}$$

zerlegen die xy-Ebene in vier Punktfelder, die jeweils von allen drei Geraden begrenzt werden. Bestimmen Sie für jedes dieser Punktfelder das Ungleichungssystem, dessen Erfüllungsmenge es darstellt. Dabei sollen die Randgeraden mit einbezogen werden.

5.3 Man stelle die durch
$\{(x,y) : x = 4s_3 + 4s_4, y = 2s_1 + 3s_2 + 4s_3, s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1, s_i \geq 0$
für $\quad i = 1, \ldots, 4\}$
gegebene Punktmenge mit Hilfe eines LUS dar.

5.4 Ein Unternehmen kann 3 Sorten Transportbeton B_1, B_2, B_3 liefern. Der „Stückgewinn“ betrage je abgesetzter Tonne konstant $g_1 = 20$, $g_2 = 25$ und $g_3 = 10$ [GE].

Das Unternehmen strebt für das laufende Geschäftsjahr einen Gewinn von G=100 000 [GE] an.
a) Beschreiben Sie die Menge zulässiger (d.h. den Zielgewinn realisierender) Absatzpläne.
b) Der Zementanteil in den Betonsorten betrage $z_1 = 50$, $z_2 = 30$ bzw. $z_3 = 10$ Gewichtsprozent.
Gibt es zulässige Absatzpläne (gemäß a)), deren Gesamtzementverbrauch
b1) exakt $t = 1\,300[ME]$ beträgt
b2) den Wert von $t = 1\,300[ME]$ nicht überschreitet?

5.5 Zur Herstellung von zwei Erzeugnissen werden drei Materialien benötigt. Der Materialbedarf je Einheit und die Materialfonds sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Material	Material je Einheit des Erzeugnisses		Materialfonds
1	3	6	240
2	6	4	360
3	0	5	150

a) Man stelle ein Ungleichungssystem für die Produktionshöhe der beiden Erzeugnisse auf und gebe Produktionspläne an, bei denen keine, eine und zwei Materialarten voll verbraucht werden.
b) Wie müßten die Materialfonds abgeändert werden, damit ein Produktionsplan existiert, bei der alle drei Materialien voll verbraucht werden?

5.6 Ein Gemüsebauer hat 30 Morgen Land zum Anbau von Erbsen und Stangenbohnen zur Verfügung.
Für einen Morgen Erbsen muß der Betrieb im Durchschnitt einen Arbeitstag, für einen Morgen Stangenbohnen zwei Arbeitstage aufwenden. Insgesamt stehen 50 Arbeitstage zur Verfügung.
Die Ausgaben für Saatgut betragen für einen Morgen Erbsen 200,– DM, für einen Morgen Stangenbohnen 100,– DM. Der Bauer kann höchstens 5.000 DM für das Saatgut ausgeben.

a) Welches ist die größtmögliche Anbaumenge von Erbsen bzw. von Stangenbohnen?
b) Welche Anbaumengen ergeben sich, wenn die zur Verfügung stehenden Arbeitstage und das Geld voll verbraucht werden sollen?
c) Wieviel Morgen Erbsen und Stangenbohnen muß der Bauer anbauen, damit sein Gewinn möglichst groß ist, wobei der Gewinn bei einem Morgen 200,– DM und bei einem Morgen Stangenbohnen 300,– DM beträgt?

5.7 Für eine Schiffsbesatzung werden zwei Vitaminpräparate U und V bereitgestellt, durch die der tägliche Vitaminbedarf des Personals gedeckt werden soll. Der Mindestbedarf an Vitaminen A, C, K je Tag, der Gehalt der Präparate an den Vitaminen je Gramm sowie die Kosten je Gramm in DM für die Präparate sind in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

	Gehalt der Präparate in Mengeneinheiten je g		Mindestbedarf in ME
	U	V	
A	0,10	0,15	1,5
C	20,0	10,0	150,0
K	1,0	4,0	20,0
Kosten je g in DM	0,1	0,2	

Welche Mengen von beiden Präparaten müssen je Tag jedem Besatzungsmitglied verabreicht werden, damit der Mindestbedarf gedeckt wird und die Kosten minimal sind?

5.8 Zwei Güter G_1 und G_2 werden auf zwei Maschinen bearbeitet und dann auf zwei Fließbändern zusammengesetzt. An einem Tag können auf der ersten Maschine höchstens 15 Stück des Gutes G_1 oder 12 Stück des Gutes G_2 oder eine entsprechende Kombination beider Güter und auf der zweiten Maschine höchstens 9 Stück des Gutes G_1 oder 18 Stück des Gutes G_2 bzw. eine entsprechende Kombination bearbeitet werden. Auf dem ersten Fließband können höchstens 7 Stück des Gutes G_1 und auf dem zweiten Fließband höchstens 10 Stück des Gutes G_2 zusammengesetzt werden. Für das Gut G_1 wird ein Gewinn von 8,– DM je Stück erzielt, für das Gut G_2 ein Gewinn von 5,– DM je Stück.

Es soll ein Produktionsplan so aufgestellt werden, da der Betrieb den größtmöglichen Gewinn erzielt.

5.9 Ein Farbenhändler hat von den Farbsorten A und B die Mengen 80 kp bzw. 50 kp zur Verfügung. Er kann daraus zwei handelsübliche Mischungen herstellen, die zu 10,– DM bzw. 15,– DM/kp verkauft werden können. Die Mischungen bestehen aus 60% bzw. 30% der Farbsorte A. Die Sorte B bildet jeweils den Restbestandteil. Wie sind die Farben zu mischen, wenn der Verkaufserlös maximiert werden soll?

5.10 Eine Baufirma lagert an zwei Orten L_1 und L_2 Großbausteine, die kostenminimal zu 3 Baustellen B_1, B_2 und B_3 transportiert werden sollen. Die Lager- und Bedarfsmengen in Stück sowie die Transportkosten in DM/Stück sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Baustelle	Bedarf	L_1	L_2	
B_1	1200	.22	.15	
B_2	2000	.25	.10	Kosten
B_3	800	.30	.25	
Lagerbestand	4000	2400	1600	

Man stelle einen kostenminimalen Transportplan auf!

5.11 Ein Produktionsverfahren kann in 2 Varianten ablaufen, die sich durch die Mengen beim Verbrauch der Rohstoffe A und B und bei der Erzeugung der Produkte X und Y sowie durch die Kosten unterscheiden. Von den Rohstoffen A und B sind Vorräte von 200 bzw. 150 Einheiten vorhanden. Von den Produkten X und Y müssen mindestens die Mengen 100 bzw. 80 Einheiten hergestellt werden. Die Produktion bringt einen Gewinn von 30,– DM/Std. bei Variante I und 40,– DM/Std. bei Variante II. Die Verbrauchs- und Produktionsmengen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Einheit/Std.	Rohstoffe		Produkte	
	A	B	X	Y
Prozeß I	5	3	5	8
Prozeß II	4	5	4	4

a) Man bestimme den Produktionsplan mit maximalem Gewinn.

b) Wie ändert sich die Lösung, wenn die Mindestproduktion von Y auf 320 Einheiten heraufgesetzt wird?

5.12 Eine Firma stellt Gefriertruhen und Kühlschränke her. Der Gewinn bei einer Gefriertruhe beträgt 360 DM, bei einem Kühlschrank 280 DM. Unter Beachtung folgender Bedingungen soll der Gesamtgewinn maximal sein:

a) Die Gehäuseabteilung kann in einem Monat höchstens 1000 Gehäuse fertigstellen.

b) Die Montageabteilung für Gefriertruhen kann im Monat höchstens 600 Stück, die für Kühlschränke höchstens 800 Stück montieren.

c) Die Abteilung für elektrische Installation kann im Monat höchstens 800 Gefriertruhen oder 1200 Kühlschränke oder eine entsprechende lineare Kombination fertigstellen.

5.13 Man löse zeichnerisch die folgenden linearen Programme.

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \le & 11 \\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 5 \\
2x_1 & & & + & x_3 & & & = & 8 \\
2x_1 & & & + & x_3 & & & \le & 8 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & Z \to \text{Max}
\end{array}$$

$x_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, 4$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 20 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \le & 10 \\
x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \le & 30 \\
2x_1 & & & + & x_3 & & & = & 24 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & Z \to \text{Max}
\end{array}$$

$x_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, 4$

5.14 Eine Fabrik stellt zwei Erzeugnisse E_1 und E_2 her, für die der erforderliche Aufwand an Rohmaterial, Maschinenzeit und Arbeitszeit sowie der zur Verfügung stehende Vorrat aus der Tabelle ersichtlich sind. Gesucht ist derjenige Produktionsplan, bei dem der Gewinn maximal ist.

Produktionsfaktor	Aufwand je ME des Produktes		Fonds
	E_1	E_2	
Rohmaterial (t)	9	3	27
Maschinenzeit (h)	2	1	7
Arbeitszeit (h)	2	2	12
Gewinn (1000DM/t)	5	3	–

6.1 Die Gesamtkosten K einer Unternehmung sind in Abhängigkeit von der Ausbringung x durch folgende Tabelle gegeben.

x	5	7	10	20
K	60	194	665	6525

Stellen Sie nach diesen Angaben die Gesamtkostenfunktion als Polynom 3. Grades dar.

6.2 Ein Hotel in Österreich hat 120 Betten. Der Übernachtungspreis beträgt 500 Schilling. Bei einer Belegung von 100 Betten betragen die Gesamtkosten 42.000 Schilling für 24 Stunden; darin sind 32.000 Schilling fixe Kosten. Bei welcher Belegung liegt die Nutzenschwelle? (Von welcher Belegung an beginnt man also einen Gewinn zu erzielen?)

6.3 Eine Motorenfabrik stellte bisher nach linearer Gesamtkostenfunktion ein Zubehörteil in Eigenfertigung mit folgenden Kosten her.

Monat	Stückzahl	Gesamtkosten in DM
Juli	100	3.500
August	300	7.700
September	260	6.860
Oktober	600	14.000
November	220	6.020
Dezember	200	5.600

Jetzt wird ihr von einer Metallwarenfabrik das gleiche Zubehörteil zum Fremdbezug für
42,– DM/Stück angeboten.

a) Wie lautet die Gesamtkostenfunktion der Motorenfabrik?

b) Wieviel Stück müßte die Motorenfabrik mindestens herstellen, um die Zubehörteile billiger zu produzieren, als sie die Metallwarenfabrik anbietet? (Hinweis: Es sind **nur ganzzahlige** Produktionsangaben sinnvoll.)

6.4 Ein Spielgerät wird zu p DM verkauft. Es ist bekannt, daß die Nachfragefunktion in der Form $x = f(p)$ durch $x = \frac{900}{p+50} - 6$ gegeben ist.

a) Wie lautet der Definitionsbereich D und der Wertevorrat W der vorstehend genannten Funktion?

b) Bei welchem Preis verschwindet die Nachfrage?

c) Wie groß ist die Nachfrage bei einem Preis von $p = 40$?

d) Bei welchem Preis werden x_0 Einheiten nachgefragt (x_0 = beliebiges, ganzzahliges Element aus dem Wertevorrat)?

e) Welche Nachfragemenge wird niemals überschritten (obere Grenze angeben — siehe auch Frage a))?

6.5 Gegeben sei die Nachfragefunktion $p = \dfrac{a}{x+b}$ mit $a > 0, \quad b > 0$.

a) Zeigen Sie, daß die Nachfrage von Null bis zu unbegrenzt großen Mengen steigt, wenn der Preis fällt.

b) Zeigen Sie, daß dabei der Umsatz (Umsatz in Geldeinheiten) bis zu einem Höchstwert ständig zunimmt (Umsatzfunktion also in der Form $U = f(p)$).

c) Bei welchem Wert liegt die obere Grenze des Umsatzes?

6.6 Für eine Wohltätigkeitsveranstaltung in einem Kino ist die Besucherzahl x bei einem festen Eintrittspreis von p DM mit $x = a : p - b$ bekannt, wobei a und b positive Konstanten sind. Es erweist sich, daß das Kino (welches 3.000 Sitzplätze hat) halb besetzt ist, wenn 12,– DM als Eintrittspreis erhoben werden, daß aber bei 9,– DM nur ein Sechstel der Sitze leer bleibt. — Bestimmen Sie die Konstanten a und b.

Ermitteln Sie

α) den Eintrittspreis, bei dem das Kino voll ist, und zeigen Sie,

β) daß — wenn alle Einkünfte Wohlfahrtszwecken zugeführt werden — sie für diesen Fall am höchsten war, und zwar

γ) wie hoch?

6.7 Für ein bestimmtes Gut ist die Nachfrage durch die Gleichung $x = 75 : p + 18$ und das Angebot durch die Gleichung $x = 3p + 18$ gegeben. Wie verläuft der Graph der Angebots- und Nachfragefunktion? Wie lautet der Gleichgewichtspreis, welche Menge wird dabei umgesetzt und welcher Erlös wird dabei erzielt?

6.8 Gegeben sei die Nachfragefunktion

$$p = \sqrt{a - bx} \qquad (\text{mit } a > 0 \land b > 0)$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D und den Wertevorrat W der vorstehend genannten Funktion.

b) Bestimmen Sie x als Funktion von p.

c) Zeigen Sie, daß die Nachfragekurve in der Form $x = g(p)$ der Bogen einer Parabel ist.

d) Wo liegt der Scheitel der Parabel? Und wie verläuft sie (steigend, fallend; gestaucht, gestreckt)?

6.9 Ein Verlag bringt ein Buch in einer Auflage von 8.000 Stück heraus. Die Herstell- und anteiligen Verwaltungs- sowie Betriebskosten betragen 96.000,– DM. Wie groß muß der Ladenverkaufspreis p sein, wenn 2% der Auflage als Werbeexemplare frei abgegeben werden und ein Gewinn von 32.000,– DM erzielt werden soll? (Es soll vorausgesetzt werden, daß die gesamte Auflage abgesetzt wird.)

6.10 Ein Betrieb produziert einen bestimmten Artikel mit fixen Kosten in Höhe von 21.000,– DM und variablen Kosten in Höhe von 18,– DM/Stück. Wie hoch muß der Absatzpreis sein, damit die Nutzenschwelle ("Break-Even-Punkt") bei 3.000 Stück liegt?

6.11 Gegeben ist die Kostenfunktion $K = \dfrac{x^2}{3} - 6x + 84$; sie gilt im Intervall $20 \leq x \leq 60$. Der Absatzpreis der produzierten Ware ist 10,– DM/Stück. Man bestimme die Nutzenschwelle.

7.1 Zeigen Sie durch Prüfung der Vorzeichen bestimmter Ableitungen, daß die Kostenfunktion

$$K = \sqrt{ax + b} + c \qquad (\text{mit } a, b, c > 0)$$

Durchschnitts- und Grenzkosten ergibt, deren Kurven mit zunehmender Ausbringung ständig fallen.

7.2 Ein Unternehmer rechnet mit der Erlösfunktion $E = \frac{1}{2}x - 1$ in Abhängigkeit von der Produktion x, wobei x als Funktion des Produktionsfaktors r wie folgt gegeben ist:

$$x = -2 + \sqrt{5r}$$

a) Stellen Sie den Erlös als Funktion des Produktionsfaktors r dar.

b) Wie groß ist der Grenzerlös für $r = 5$?

c) Wie verhält sich der Grenzerlös in Abhängigkeit von r? (steigend, fallend oder konstant?)

7.3 Die Produktionskosten für x Einheiten eines Gutes seien gegeben durch $K = 0,01x^2 + 0,1x + 100$. Die Nachfragefunktion lautet

$$p = \frac{x+1}{(x+2)^2}.$$

Bestimmen Sie den Grenzgewinn bezüglich des Outputs x, und zwar

a) allgemein als Funktion von x,

b) speziell für den Output $x = 10$.

7.4 Ein Monopolist rechnet mit der Erlösfunktion $E = -3x_2 + 18x - 6$ und der Kostenfunktion $K = 2x + 6$ für das Gut X. Bestimmen Sie die Abszisse des Cournotschen Punkts. (Anmerkung: Das Gut, auf das sich diese Angaben beziehen, kann auch nichtganzzahlig hergestellt werden.)

7.5 Aus dem “Postgebührenheft” der Deutschen Bundespost von Januar 1983 konnten u.a. folgende Angaben entnommen werden: Im Verkehr mit dem Ausland sind für Briefe in Rollenform als Höchstmaße zulässig: Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 104cm, Länge jedoch nicht über 90 cm. Welcher nach dieser Vorschrift zulässige Zylinder hat den größten Rauminhalt?

7.6 Bei einer Reisegeschwindigkeit von v (km/h) entstehen für ein Fahrzeug Kosten von $K = 0,1 + 1,5v - 0,01v^2$ pro Stunde. Die Kostenfunktion gilt im Intervall $0 \leq v \leq 75$ (km/h). Bei welcher Geschwindigkeit nehmen die Kosten pro Stunde bzw. die Kosten pro Kilometer ein Minimum an?

7.7 Für ein Gut, das nicht nur ganzzahlig erzeugt werden kann, gilt im Intervall $1 \leq p \leq 16$ (GE) die Nachfragefunktion

$$x(p) = \frac{36}{\sqrt{p}}.$$

Bei welchem Preis nimmt der Umsatz (in Geldeinheiten) ein Maximum an?

7.8 Dasselbe wie in Aufgabe 7 für die Nachfragefunktion

$$p = -\frac{1}{3}x + 40$$

und das Intervall

a) $2 \leq p \leq 8$ (GE)

b) $2 \leq p \leq 30$ (GE)

7.9 Ein Konsument habe folgende Nutzenfunktion für ein Gut in Abhängigkeit von der Menge x von G: $N(x) = -x^2 + 12x$.
Bis zu welcher vorhandenen Menge x von G ist es für den Konsumenten sinnvoll, weitere Mengeneinheiten von G zu kaufen?

7.10 Eine Firma produziert ein Gut G mit Hilfe von vier Faktoren $x_1, \ldots, x_4$.
Die Produktionsfunktion lautet: $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_1 + x_2)^2 + 12x_3x_4$.
Die Firma habe nun die Möglichkeit, den ersten Faktor zu variieren, während die drei weiteren fest vorgegeben sind. Wie kann der Output maximiert werden?

7.11 Der Hersteller einer Zeitung verkauft sein Gut zur Zeit monatlich an 2000 Leser zum Preis von 50 DM/Monat. Aus Umfragen weiß er, daß bei jeder Senkung/Steigerung des Preises um 1 DM die Nachfrage um 100 Leser steigt/sinkt.

a) Bei welchem Preis der Zeitung erreicht er maximale Einnahmen?
b) Der Hersteller hat für die Produktion pro Monat Fixkosten von 30 000 DM und Kosten von 10 DM pro Leser. Bei welchem Preis erzielt er den größten Gewinn?

7.12 Zwei Großßabnehmer für elektrische Energie, die in einem Abstand von 40 km bzw. 60 km auf der gleichen Seite eines gradlinig verlaufenden Kanals liegen, sollen durch ein am Kanal liegendes Kraftwerk versorgt werden. An welcher Stelle ist das Kraftwerk zu errichten, wenn jeder Abnehmer mit einer eigenen Leitung angeschlossen werden soll und wenn die beiden Versorgungsleitungen zusammen eine möglichst kleine Gesamtlänge haben sollen? Die Fußpunkte der Lote, die man von den Abnahmeorten auf den Kanal fällt, liegen 70 km weit auseinander.

7.13 Es sei $K = ax^2 + bx + c$ die Kostenfunktion eines Monopolisten mit uneingeschränkter Kapazität und $p = d - fx$ die Preis-Absatz-Funktion $(a, b, c, d, f > 0)$.
Bestimmen Sie den Monopolpreis und -absatz durch die Parameter a, b, c, d, f (Monopolpreis und -menge ist derjenige Preis bzw. diejenige Menge, die zum Gewinnmaximum führt).

7.14 Eine Zuckerfabrik mit einer Tageskapazität von 180 Einheiten hat Gesamtkosten von $K = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200$, wenn x Einheiten Zucker pro Tag erzeugt werden. Der feste Marktpreis ist p DM pro Einheit.

a) Wie lautet die Angebotsfunktion der Unternehmung?
b) Bei welchem Preis werden 150 Einheiten erzeugt?
c) Wieviel Einheiten werden bei einem Marktpreis von 45,– DM pro Einheit erzeugt? (Beachten Sie die Kapazitätsgrenze!)

7.15 Eine Fabrik mit einer Tageskapazität von 50 Einheiten Stahl erzeugt täglich x Einheiten Stahl zu den Gesamtkosten

$$K = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300.$$

a) Wieviele Einheiten pro Tag muß der Unternehmer im Hinblick auf die Gewinnmaximierung erzeugen, wenn der feste Marktpreis

i) 20,30 DM

ii) 290,- DM

pro Einheit beträgt ?

b) Wie würde sich der Unternehmer entscheiden, wenn die Kapazitätsgrenze seines Betriebs bei 35 Einheiten pro Tag läge ?

c) Wie würde sich der Unternehmer entscheiden, wenn der feste Marktpreis $p = 15$ DM pro Einheit wäre ?

7.16 Ein Elektrogerätegroßhändler hat mit einem Fabrikanten einen Jahresliefervertrag über 300 Fernsehgeräte getätigt und steht nun vor der Entscheidung, in welchen Posten und damit in welchen Zeitabständen er die Lieferung vereinbaren soll. Für jede angelieferte Partie muß er — unabhängig von der Zahl der angelieferten Geräte — einen pauschalen Transportkostenbeitrag von 450,– DM zahlen. Die Lagerkosten (Raumkosten und Zins) belaufen sich auf 60,– DM pro Gerät und Jahr.

Wieviel Geräte pro Lieferung müssen bestellt werden, damit die Gesamtkosten (aus Transport und Lagerung) im ganzen Jahr möglichst klein gehalten werden?

7.17 Ein Produktionsbetrieb fertigt ein bestimmtes Erzeugnis.

a) Der Bedarf beträgt r Stück in der Zeitspanne von T Zeiteinheiten. Er verteilt sich gleichmäßig auf diese Zeitspanne. Der Betrieb fertigt das Erzeugnis in Losen. Entwickeln Sie eine Formel für die optimale Losgröße (in x Stück), wobei folgende Parameter zu beachten sind:
l = Lagerkosten pro Erzeugnis und Zeiteinheit
u = Lohn- und Materialkosten **aller** r Erzeugnisse
c = Rüstkosten für **ein** Los

b) Verwenden Sie die Formel der Aufgabe a) für ein Zahlenbeispiel mit:
r = 40.000 Erzeugnisse in diesem Jahr,
l = 0,50 DM pro Stück und Monat, und
c = 300,– DM für ein Los.

7.18 Eine Porzellanfabrik fertigt ein bestimmtes Tafelgeschirr an, von dem es 4.000 Gedecke/Jahr produzieren und absetzen kann. Die Rüstkosten für ein Fertigungslos betragen
3.200,– DM/Produktionsserie. Das im bereits gefertigten (aber noch nicht abgesetzten) Geschirr gebundene Kapital muß mit 8% p.a. verzinst werden.

Wie groß soll das Los pro Produktionsserie gewählt werden, wenn sich der Absatz kontinuierlich vollzieht und die proportionalen Herstellungskosten (Rohstoffe, Energieverbrauch usw.) 80,– DM/Gedeck betragen?

7.19 Bestimmen Sie die Nachfrageelastizität bzgl. des Preises, wenn das Nachfragegesetz

$$x = \frac{20}{p+1}$$

lautet, und wenn $p = 3$ ist. Interpretieren Sie den gefundenen Wert.

7.20 Bestimmen Sie die Nachfrageelastizität bzgl. des Preises als Funktion von x für die Nachfragegesetze

a) $p = \sqrt{a - bx}$

b) $p = (a - bx)^2$

c) $p = a - bx^2$

und bestimmen Sie für jeden Fall die Größe von p, für die $\varepsilon_{N=-1}$ ist.

7.21 Gegeben sei die Nachfragefunktion $p = \frac{60-x}{x}$.

a) Bestimmen Sie die Nachfrageelastizität bzgl. des Preises $p = 11$ und interpretieren Sie den gefundenen Wert.

b) Zeigen Sie, daß die Nachfrageelastizität konstant $-\frac{1}{2}$ beträgt, wenn die Nachfragefunktion $x = \frac{9}{\sqrt{p}}$ lautet.

c) Zeigen Sie, daß für die Nachfragefunktion $x = ap^{-k}$ (mit $a, k > 0$ und konstant) die Nachfrageelastizität konstant $-k$ ist.

(Nachfrageelastizität jeweils bzgl. des Preises, also jeweils ε_{xp}.)

7.22 Stellen Sie fest, ob die Nachfragefunktion $p = \frac{2}{x-1}$ beim Preis $p = 6$ elastisch ist (bzgl. des Preises).

7.23 Für welche Preise ist die Nachfragefunktion $x = ap + b$ (mit $a < 0$ und $b > 0$) elastisch (bzgl. des Preises)?
Beachten Sie den Definitionsbereich.

7.24 Die Nachfragefunktionen für zwei Güter A und B lauten:
$x_A = 7 \cdot p^{-1/2}$
$x_B = -6p + 18$
Welche Nachfrage reagiert "empfindlicher" auf Preisänderungen?

7.25 Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $y = f(x)$ die Elastizität von y bzgl. x, also ε_{yx} (und zwar jeweils als Funktion von x).

a) $y = x^2$

b) $y = ln\, ax; (a > 0)$

c) $y = xe^{-a}; (a > 0)$

d) $y = x^a e^{bx}; (a > 0)$

e) $y = a^x; (\text{mit } a > 0)$

f) $y = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$

g) $y = x^2 - 4x + 2$

h) $y = \frac{2x^2+1}{4x^3-2}$

7.26 Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen $y = f(x)$ die Elastizitäten ε_{yx}, und bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktionen unelastisch, 1-elastisch bzw. elastisch sind.

a) $y = \sqrt{1 - x^2}$

b) $y = \frac{3x}{5x-1}$

c) $y = \sqrt{2x + a}(\text{mit } a > 0)$

Beachten Sie den Definitionsbereich.

7.27 Es sei $f(p_A) = 10 - 2p_A$ die Nachfragefunktion für eine bestimmte Automarke abhängig vom Preis p_A je Mengeneinheit. Außerdem sei $g(p_B) = 20 - 12p_B$ die Nachfragefunktion einer Brotsorte abhängig vom Preis p_B je Mengeneinheit.
Untersuchen Sie mit Hilfe der Elastizitäten, welche Nachfrage empfindlicher auf Preisänderungen reagiert.
(Beachten Sie, daß die Elastizität nicht von der Maßeinheit abhängt.)

7.28 Bestimmen Sie für folgende Nachfragefunktionen die Preiselastizität der Nachfrage:
a) $\alpha(p) = 0,2p^{-\frac{1}{8}}$
b) $\alpha(p) = 10e^{-\frac{1}{3}p}$

7.29 Wenn die Nachfragefunktion $q = \phi(p)$, die die nachgefragte Menge q in Abhängigkeit vom Preis p angibt, umkehrbar eindeutig ist, kann man den Preis in Abhängigkeit von der Menge angeben: $\psi(q) := \phi^{-1}(q) = p$.
Entsprechend kann man den Gesamterlös als Funktion des Preises oder der nachgefragten Menge schreiben.
Berechnen Sie die Elastizität des Erlöses
a) bzgl. des Preises
b) bzgl. der nachgefragten Menge.
Schreiben Sie diese dann als Funktion der Preiselastizität der Nachfrage $\varepsilon_{\phi(p),p}$.

8.1 Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\int x dx$ b) $\int 3t^2 dt$ c) $\int \frac{1}{4}x^4 dx$

d) $\int \frac{1}{2} dt$ e) $\int (2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{5}{2}) dx$

f) $\int_{-1}^{o} x dx$ g) $\int_{2}^{3} (6x^2 - x^3) dx$

h) $\int_{-1}^{2} (4 - 6x - x^2) dx$

8.2 Wie groß ist die Fläche, die die Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse einschließt? (Skizze)
a) $y = 8 - x^2$
b) $y = 3x - \frac{3}{4}x^2$
c) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

8.3 Bestimmen Sie die Größe der Gewinnlinse bei gegebener Gesamtkostenfunktion

$$K = x^3 - 9x^2 + 30x + 16$$

in Verbindung mit der Erlösfunktion $E = 24x$.

8.4 Ermitteln Sie für den Grenzumsatz $U' = 20 - 4x$ die Gesamtumsatzfunktion und leiten Sie die Nachfragefunktion ab, für die bekannt ist: "Für $p = 30$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit werden $x = 4$ Mengeneinheiten nachgefragt."

8.5 Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion, wenn bekannt ist, daß die Fixkosten c GE betragen und daß bei einer Ausbringung von x Einheiten die Grenzkosten $K' = ax + b$ lauten (mit $a, b, c > 0$).

8.6 Berechnen Sie die Konsumentenrente und die Produzentenrente für eine Ware, deren Angebot und Nachfrage durch folgende Gleichungen gegeben sind:

Angebotsfunktion:	p	$=$	$2(x+1)$
Nachfragefunktion:	p	$=$	$\frac{1}{2}(36-x^2)$

8.7 Die Nachfrage nach einem Gut erfolgt nach der Nachfragefunktion $p = 100 - 2x - x^2$. Berechnen Sie die Konsumentenrente, wenn das Gut zu einem Marktpreis von a) $p_1 = 1$, b) $p_2 = 20$, c) $p_3 = 52$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit angeboten wird. Bestimmen Sie auch Definitionsbereich und Wertevorrat der Nachfragefunktion.

8.8 Gegeben sei eine Umsatzfunktion in der Form $U = f(p)$. Der Grenzumsatz lautet konstant -15 (Geldeinheiten), und bei $p = 16$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit werden $x = 7$ Mengeneinheiten nachgefragt. Das fragliche Gut kann auch nicht-ganzzahlig produziert und nachgefragt werden.

a) Wie lautet die Nachfragefunktion in der Form $x = h(p)$?

b) Wie lautet die Nachfragefunktion in der Form $p = g(x)$?

c) Interpretieren Sie die obige Aussage: "Der Grenzumsatz beträgt konstant -15 Geldeinheiten."

d) Bei welchem Preis erlischt die Nachfrage?

e) Ermitteln Sie auf der Basis der Lösung zu b) die Grenznachfrage
   - i) als Funktion p,
   - ii) für den Wert $p = 21$ Geldeinheiten/Mengeneinheit.

f) Interpretieren Sie den unter e.ii) gefundenen Wert.

g) Wie lautet der Definitionsbereich der Umsatzfunktion?

8.9 Für einen Produktionsvorgang (Output x in Mengeneinheiten) sind die Grenzkosten mit $3x^2-4x+20$ und die Fixkosten mit 200 (jeweils in Geldeinheiten) bekannt. Welche **Stückkosten** entstehen bei einem Output von 20?

8.10 Von einer Angebotsfunktion ist folgendes bekannt:
Das Angebot erlischt bei $p = 4$ Geldeinheiten, bei $p = 9$ Geldeinheiten werden $x = 200$ Mengeneinheiten angeboten und für das Grenzangebot gilt $x' = \frac{a}{\sqrt{p}}$ (mit $a \in R$). Wie lautet die Angebotsfunktion in der Form $x = f(p)$?
Hinweis: Die Stammfunktion von $h = p^{\frac{1}{2}}$ ist $H = 2p^{\frac{1}{2}} + C$; also: $\int \frac{1}{\sqrt{p}} dp = 2\sqrt{p} + C$.

8.11 Lösen Sie durch Substitution oder partielle Integration:

a) $\int e^{-2x} dx$	b) $\int \frac{8}{e^{4x-3}} dx$	c) $\int \frac{1}{1+4x} dx$
d) $\int \frac{x}{1-4x^2} dx$	e) $\int \frac{ln\, x}{x} dx$	f) $6 \int x(3x^2+8) dx$
g) $2 \int x \cdot e^{2x^2} dx$	h) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$	i) $\int \frac{3x^2}{9x^3+18} dx$
j) $\int \frac{dx}{x \cdot ln\, x}$	k) $\int ln\, x^2 dx$	l) $\int x^3 ln\, x\, dx$
m) $\int x \cdot e^x dx$	n) $\int \frac{x^3}{e^x} dx$	o) $\int \frac{(ln\, x)^2}{x} dx$

Überprüfen Sie die Ergebnisse durch Differentiation.

8.12 Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke existieren:

a) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ b) $\int\limits_1^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\int\limits_2^{3} \frac{dx}{x^2}$

d) $\int\limits_1^{e} ln\; x\; dx$ e) $\int\limits_0^{e} \frac{1}{x+1}\, dx$ f) $\int\limits_{-1}^{1} e^x\; dx$

g) $\int\limits_2^{3} \frac{1}{x^3} dx$ h) $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x}\; dx$ i) $\int\limits_1^{a} \frac{dx}{x^2}$ mit $a \geq 1$

k) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{x\; dx}{\sqrt{1-x^2}}$ l) $\int\limits_2^{3} \frac{dx}{-x}$ m) $\int\limits_1^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

8.13 Man berechne das bestimmte Integral

$$\int\limits_1^3 x^n\; dx$$

nach der Trapez- und nach der Simpsonformel mit je 2, 4 und 8 Intervallen für $n = 3$ und $n = 4$. Man vergleiche die 6 Ergebnisse mit der exakten Lösung.