Universität–Gesamthochschule–Paderborn Sommer 2002
Fachbereich 17 – Mathematik

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler A

Lösungen
zu den Abschnitten 6 bis 8

6.1

Lösung:
Gesucht sind Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, so daß für das Polynom 3. Grades*
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *gilt:*
$K(5) = 60$, $K(7) = 194$, $K(10) = 665$, $K(20) = 6525$.
Berechnet man die Werte der Kostenfunktion an den angegebenen Stellen, erhält man:
$125a + 25b + 5c + d = 60$
$343a + 49b + 7c + d = 194$
$1000a + 100b + 10c + d = 665$
$8000a + 400b + 20c + d = 6525$
Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$, $d = 5$. *Das gesuchte Polynom lautet also* $K(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 5$.

6.2

Lösung:
Man betrachte die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$*; hierbei ist E(x) die Erlösfunktion und K(x) die Gesamtkostenfunktion mit x=Anzahl der belegten Betten.*
Pro belegtem Bett werden 500 Schilling verdient. Die Erlösfunktion lautet also $E(x) = 500x$.
Aufgrund fehlender Informationen nimmt man an, daß die Kostenfunktion linear ist, also $K(x) = ax + b$. *Die Fixkosten b betragen laut Voraussetzung 32 000 Schilling, und die Gesamtkosten betragen 42 000 Schilling bei* $x = 100$. *Es gilt also* $42\,000 = K(100) = 100a + 32\,000$.
Es folgt $100a = 10\,000$ *und dann* $a = 100$.
Die Gewinnfunktion lautet damit $G(x) = 500x - (100x + 32000) = 400x - 32000$.
Die Nutzenschwelle liegt bei dem kleinsten x_0*, für das gilt* $G(x) > 0$*, für alle* $x > x_0$*. (Man mache sich dazu den Verlauf von* $G(x)$ *klar.)*
Wegen der Linearität von G reicht es, ein x_0 *zu finden, für das* $G(x_0) = 0$*:*
$400x_0 - 32000 = 0$. *Also* $x_0 = 80$. *D.h. ab einer Belegung von 80 Betten erzielt man Gewinn.*

6.3

Lösung:
a) Die Gesamtkostenfunktion wird als linear vorausgesetzt, also
$K(x) = ax + b$*, wobei x die Anzahl der produzierten Teile ist.*
Gesucht sind a und b.
Bei einer Stückzahl von 100 betragen die Gesamtkosten 3500 und bei einer Stückzahl von 300 betragen sie 7700. Man erhält die Gleichungen
$3500 = 100a + b$
$7700 = 300a + b$.
Diese führen auf $a = 21$ *und* $b = 1400$.
Die Gesamtkostenfunktion lautet also
$K(x) = 21x + 1400$ *(auch die weiteren Daten sind damit konsistent).*
b) Zubehörteile billiger zu produzieren heißt in diesem Fall, daß die Kosten pro Stück kleiner sind als 42,-DM. Die Stückkosten bei einer produzierten Menge von x Stück betragen $k(x) = \frac{K(x)}{x}$. *Gesucht ist also* x_0*, so daß* $\frac{21x+1400}{x} < 42$ *für alle* $x > x_0$*. Dies formt man nach x um (*$x > 0$*!) und erhält* $x > \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$*. Weil nur ganzzahlige Produktionsangaben sinnvoll sind, ist ab einer produzierten Menge von 67 Teilen der Preis pro Stück kleiner als 42,-DM.*

6.4

Lösung:
a) $p \in [0, 100] \quad x \in [0, 12]$
b) $x = 0$ *für* $p = 100$ *c)* $x = 4$ *bei* $p = 40$
d) Beim Preis von $p_0 = \dfrac{900}{x_0 + 6} - 50$ *werden* x_0 *Einheiten nachgefragt.*

6.5

Lösung:
a) Für die Nachfrage x gilt $x(p) = \frac{a}{p} - b$ *(wegen* $a > 0$ *verschwindet p nicht).*
Beim Preis $p = \frac{a}{b}$ *ist die Nachfrage 0.*
Wenn $p_1 < p_2$*, dann ist* $x(p_1) > x(p_2)$*. Außerdem gibt es zu jeder Zahl* $x_0 > 0$ *ein* p_0*, so daß* $x(p_0) \geq x_0$*: wähle* $p_0 = \frac{a}{x_0 + b}$*. D.h. die Nachfrage wird beliebig groß, wenn nur p klein genug wird.*
b)+c) $U = f(p) = p \cdot x(p) = a - bp$*. Wenn* $p_1 < p_2$*, dann ist* $a - bp_1 > a - bp_2$*, d.h. der Umsatz steigt, wenn der Preis fällt. Da* $p > 0$ *ist, kann* $U(p)$ *den Wert a nicht überschreiten.*

Lösung:
$x(p) = \frac{a}{p} - b$
Aus $\frac{a}{12} - b = 3000 - \frac{3000}{2} = 1500$ *und* $\frac{a}{9} - b = 3000 - \frac{3000}{6} = 2500$
folgt $a = 36\,000$ *und* $b = 1500$, *d.h.* $x(p) = \frac{36\,000}{p} - 1500$

6.6 *α) Wenn* $x(p) = 3000$, *dann ist* $p = 8$.
β) Die Einkünfte werden durch die Erlösfunktion gegeben: $E(p) = p \cdot x(p) = a - bp$, *d.h. der Erlös ist umso größer je kleiner der Preis ist. Andererseits ist bei* $p = 8$ *die Kapazitätsgrenze* $x = 3000$ *erreicht; also sind für* $p = 8$ *die Einkünfte maximal.*
γ) $E(8) = 24\,000$

Lösung:
Nachfragefunktion: $x_N(p) = \frac{75}{p} + 18$, *Angebotsfunktion:* $x_A(p) = 3p + 18$
Beim Gleichgewichtspreis stimmen Nachfrage und Angebot überein. Es muß also gelten:

6.7 $\frac{75}{p} + 18 = 3p + 18$.
Dies ist der Fall für $p = 5$ *(und für* $p = -5$, *was aber nicht ökonomisch sinnvoll ist). Die umgesetzte Menge ist* $x_N(5) = x_A(5) = 33$; *der Erlös ist*
$E(5) = 5 \cdot x_N(5) = 165$.

Lösung:

6.8 *a)* $D = [0, a/b]$ $p(D) = [0, \sqrt{a}]$ *b)* $x = \dfrac{-p^2 + a}{b}$ *c),d) Schulwissen*

Lösung:
Es werden 7840 Exemplare verkauft. Die Gewinnfunktion lautet

6.9 $G(p) = 7840p - 96\,000$, *wobei p der Verkaufspreis ist. Beim Preis von* $p = 16\frac{16}{49}$ *[DM je Stück] wird ein Gewinn von 32 000 DM erzielt.*

Lösung:
Die Kostenfunktion lautet $K(x) = 21\,000 + 18x$*[DM], wobei x die produzierte Stückzahl ist.*

6.10 *Die Gewinnfunktion ist also* $G(x) = px - K(x) = (p-18)x - 21\,000$*[DM]. Im Punkt* $x = 3000$ *beträgt der Gewinn* $3000p - 75\,000$, *dieser wird 0 für* $p = 25$. *Da die Gewinnfunktion für* $p = 25$ *monoton wächst, ist* $x = 3000$*[St] die Nutzenschwelle.*

Lösung:
Die Gewinnfunktion ist $G(x) = 10x - K(x) = 10x - \frac{x^2}{3} + 6x - 84 = -\frac{x^2}{3} + 16x - 84$. *Der*

6.11 *Graph von G ist eine nach unten geöffnete quadratische Parabel mit den Nullstellen 6 und 42, d.h. G(x) ist auf dem Intervall* $(6, 42)$ *größer als 0. Da G hier aber nur auf [20,60] definiert ist, liegt die Nutzenschwelle bei* $x = 20$*[St].*

7.1 *Lösung:*

Die Durchschnittskosten sind durch die Funktion $k(x) = \dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{ax+b}+c}{x}$ $(x > 0)$ *gegeben.*

Es gilt $k'(x) = \left(\dfrac{ax}{2\sqrt{ax+b}} - (\sqrt{ax+b}+c)\right)/x^2$

$= \frac{-ax-2b-2c\sqrt{ax+b}}{2x^2\sqrt{ax+b}} < 0$, *für* $x > 0$. *D.h. die Durchschnittskosten fallen mit zunehmender Ausbringung.*

Zweimaliges Ableiten der Kostenfunktion ergibt $K''(x) = \dfrac{-a}{4(ax+b)^{\frac{3}{2}}} < 0$, *für* $x > 0$. *D.h. auch die Grenzkosten fallen.*

7.2 *Lösung:*

a) $E(r) = \dfrac{1}{2}x(r) - 1 = \dfrac{\sqrt{5r}}{2} - 2$, $r > 0$.

b) $E'(r) = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{r}}$, $E'(5) = \frac{1}{4}$.

c) $E''(r) = \dfrac{-\sqrt{5}}{8r^{3/2}} < 0$ *für alle* $r > 0$, *also ist* E' *fallend.*

7.3 *Lösung:*

Die Gewinnfunktion lautet

$G(x) = p(x)x - K(x) = \dfrac{x^2+x}{(x+2)^2} - 0,01x^2 - 0,1x - 100$

a) $G'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+2)^2 - (x^2+x)2(x+2)}{(x+2)^4} - 0,02x - 0,1$

$= \frac{3x+2}{(x+2)^3} - 0,02x - 0,1$

b) $G'(10) = \dfrac{32}{12^3} - 0,3 = -\dfrac{38}{135}$

7.4 *Lösung:*

Der Cournotsche Punkt ist der Schnittpunkt der Grenzerlösfunktion mit der Grenzkostenfunktion, es muß also gelten: $-6x + 18 = E'(x) = K'(x) = 2$. *Es folgt* $x = 8/3$.

7.5 *Lösung:*

Rauminhalt: $V = h(\dfrac{d}{2})^2\pi$, $h \in [0,90]$, $h + 2d \in [0,104]$

Da V bei steigendem d oder h steigt, liegt das Maximum bei $h + 2d = 104$, *also* $h = 104 - 2d$.

Für den Rauminhalt ergibt sich: $V(d) = \pi(26d^2 - \dfrac{d^3}{2})$. *Dieser ist nun in Abhängigkeit von d zu maximieren.*

$V'(d) = \pi(52d - \dfrac{3d^2}{2}) = 0 \Rightarrow d = 0$ *oder* $d = 104/3$.

Bei $d = 0$ *ist der Rauminhalt* $V = 0$, *es liegt also kein Maximum vor. Daraus folgt, daß an der Stelle* $d = 104/3$ *ein lokales Maximum vorliegt. Da das lokale Minimum der kubischen Funktion V an der Stelle 0 liegt, ist bei* $d = 104/3$ *auch das globale Maximum im vorgegebenen Intervall (Skizze).*

7.6 *Lösung:*

Der Ansatz $K'(v) = 1,5 - 0,02v = 0$ *ergibt* $v = 75$. *Wegen* $K''(v) = -0,02$ *ist* $v = 75$ *lokale Maximumstelle.*

Für $v \in [0,75)$ *ist* $K'(v) > 0$, *d.h.* $K(v)$ *wächst mit wachsendem v. Also muß bei* $v = 0$ *das Minimum sein.*

Bei v km/h fährt man v km in einer Stunde und hat Kosten von $K(v)$ *pro Stunde. Die Kosten für 1 km bei v km/h betragen also* $K(v)/v$.

Sei $H(v) := \dfrac{K(v)}{v} = \dfrac{0,1}{v} + 1,5 - 0,01v$

$H'(v) = -\dfrac{0,1}{v^2} - 0,01 < 0$ *für alle* $v \in [0,75]$, *d.h.* $H(v)$ *fällt mit wachsendem v. Also muß an der Stelle* $v = 75$ *das Minimum sein.*

8.1	*Lösung:* a) $\frac{1}{2}x^2+c$ b) t^3+c c) $\frac{1}{20}x^5+c$ d) $\frac{1}{2}t+c$ e) $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{16}x^2-\frac{5}{2}x+c$ f) $-\frac{1}{2}$ g) $21\frac{3}{4}$ h) 0
8.2	*Lösung:* Schnittpunkte mit der x-Achse — Lösung (Vorzeichen beachten) a) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ — $7\sqrt{2}$ b) 0; 4 — 8 c) -2; 3 — 125/12
8.3	*Lösung:* Schnittpunkt: $E(x)=K(x) \Leftrightarrow x^3-9x^2+6x+16=0$ 1.Nullstelle: $x_1=-1$, dann Polynomdivision. $(x^3-9x^2+6x+16):(x+1)=x^2-10x+16$ Weitere Nullstellen sind also: $x_2=2$ und $x_3=8$. Im Intervall $[2,8]$ ist $E(x)\geq K(x)$. Gewinnlinse: $\int_2^8 E(x)-K(x)dx=\int_2^8(-x^3+9x^2-6x-16)dx$ $=-\frac{1}{4}x^4+3x^3-3x^2-16x]_2^8=216$
8.4	*Lösung:* $x\cdot p(x)=U(x)=20x-2x^2+c \quad \Rightarrow p(x)=20-2x+\frac{c}{x}$ $\Rightarrow 30=p(4)=20-8+\frac{c}{4} \quad \Rightarrow c=72$
8.5	*Lösung:* $K(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$
8.6	*Lösung:* Schnittpunkt: $2x+2=18-\frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow x_1=4$ und $x_2=-8$ Auf $[0,4]$ ist die Nachfragefunktion größer als die Angebotsfunktion. Konsumentenrente: $\int_0^4 \frac{1}{2}(36-x^2)-2(x+1)dx=\int_0^4 16-\frac{1}{2}x^2-2x\,dx$ $=16x-\frac{1}{6}x^3-x^2]_0^4=37\frac{1}{3}$
8.7	*Lösung:* $D_p=\mathbb{R}$, $W_p=(-\infty,101]$ (Die Kurve von p ist eine nach unten geöffnete quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt $(-1,101)$.) $D_{oec}=\mathbb{R}_0^+$, $W_{oec}=[0,100]$, da $p(0)=100$ a) $100-2x-x^2=p_1=1 \quad \Rightarrow x^2+2x-99=0 \Rightarrow x_1=9,\ x_2=-11$ $\int_0^9 100-2x-x^2-1\,dx=\int_0^9(99-2x-x^2)\,dx=99x-x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^9=567$ b) $100-2x-x^2=p_2=20 \quad \Rightarrow x^2+2x-80=0 \quad \Rightarrow x_1=-10,\ x_2=8$ $\int_0^8 100-2x-x^2-20\,dx=\int_0^8 80-2x-x^2\,dx=80x-x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^8=405\frac{1}{3}$ c) $100-2x-x^2=p_3=52 \quad \Rightarrow x^2+2x-48=0 \quad \Rightarrow x_1=-8,\ x_2=6$ $\int_0^6 100-2x-x^2-52\,dx=\int_0^6 48-2x-x^2\,dx=48x-x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^6=180$
8.8	*Lösung:* $U=f(p) \quad f'(p)=-15 \quad p\cdot x(p)=f(p)=-15p+c$ $112=16\cdot 7=f(16)=-15\cdot 16+c=-240+c \quad \Rightarrow c=352$ a)+b) $f(p)=-15p+352$ $x(p)=\frac{f(p)}{p}=-15+\frac{352}{p}$ $p(x)=\frac{352}{x+15}$ d) $x(p)=-15+\frac{352}{p}=0 \quad \Rightarrow p=\frac{352}{15}$ e) $x'(p)=\frac{-352}{p^2}$ $x'(81)=\frac{-352}{6561}\approx -0,05$ g) $D_f=\mathbb{R}$, $D_{oec}=\mathbb{R}_0^+$
8.9	*Lösung:* Die Kostenfunktion lautet: $K(x)=x^3-2x^2+20x+200$ $\frac{K(20)}{20}=390$

8.10

Lösung:

$x(p) = a\int \frac{1}{\sqrt{p}} = 2a\sqrt{p} + c$

$0 = x(4) = 4a + c \qquad \Rightarrow c = -4a$

$200 = x(9) = 6a + c \qquad \Rightarrow c = 200 - 6a \qquad \Rightarrow a = 100 \qquad \Rightarrow c = -400$

$\Rightarrow x(p) = 200\sqrt{p} - 400$

8.11

Lösung:

a) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ | b) $-2e^{-4x+3} + c$

c) $\frac{1}{4}\ln|1 + 4x| + c \quad (x \neq -\frac{1}{4})$ | d) $-\frac{1}{8}\ln|1 - 4x^2| + c \quad (|x| \neq \frac{1}{2})$

e) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad (x > 0)$ | f) $\frac{9}{2}x^4 + 24x^2 + c$

g) $\frac{1}{2}e^{2x^2} + c$ | h) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 7| + c$

i) $\frac{1}{9}\ln|x^3 + 2| + c \quad (x \neq \sqrt[3]{-2})$ | j) $\ln|\ln x| + c \quad (x > 0)$

k) $(ln(x^2) - 2)x + c \quad (x \neq 0)$ | l) $\frac{1}{4}(\ln x - \frac{1}{4})x^4 + c \quad (x > 0)$

m) $(x - 1)e^x + c$ | n) $e^{-x}(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) + c$

o) $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + c \quad (x > 0)$

8.12

Lösung:

a) $28/3$	b) 4,5	c) 1/6	d) 1
e) $\ln(e + 1)$	f) $e - 1/e$	g) 5/72	h) $e - 1/e$
i) $1 - 1/a$	k) 0	l) $\ln 2 - \ln 3$	m) 1

8.13

Lösung:

Exakte Lösung: 20 für $n = 3$; 48,4 für $n = 4$

Trapezformel:

Intervalle	$n = 3$	$n = 4$
2	22	57
4	20,5	50,5625
8	20,125	48,94

Simpsonformel:

Intervalle	$n = 3$	$n = 4$
2	20	48,4167
4	20	48,401042
8	20	48,400065