AUFGABE 1 : 100 Punkte

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $(A - 2C^T)^T =$

b) $det B =$

c) $D^{-1} =$

Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

d) $det ABD^{-1} =$

e) $det(A + B) =$

f) Ermitteln Sie die Matrix X aus

$(D^{-1}X - B)D = I$

Antwort: $X =$

g) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -35 \\ 1 & 12 & -38 \\ -4 & -47 & 150 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Determinante und die Inverse von A (letztere, falls sie existiert).

$A^{-1} =$

$det A =$

AUFGABE 2 : 100 Punkte

Gegeben seien zwei (n,n)-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Wir betrachten die Gleichung

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig $\boxed{\text{R}}$, und welche falsch $\boxed{\text{F}}$ (Zutreffendes ankreuzen!)

Die Gleichung

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt immer

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt niemals

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt für $n = 1$.

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt, wenn $AB = BA$ ist.

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt, wenn $B = I$ (Einheitsmatrix) ist.

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt nur, wenn $AB = BA$ gilt.

AUFGABE 3 : **103 Punkte**

Gegeben seien die Punkte $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ und $\underline{d} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

.

a) Zeichnen Sie die konvexe Hülle[1]

$$conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$$

in das folgende Diagramm ein:

[1] d.h. die Menge aller konvexen Linearkombinationen, die aus $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ gebildet werden können

Erinnerung:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

.

b) Berechnen Sie Zahlen α, β, γ so, daß

$$\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$$

eine konvexe Linearkombination ist.

(Hinweis: Stellen Sie eine entspechendes Gleichungssystem auf und lösen Sie es. Beachten Sie eventuelle Nebenbedingungen.)

$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma =$

AUFGABE 4 : 104 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & u & 3 & -4 \\ -3 & -9 & u-12 & 4v \\ -1 & -3 & v & 4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie den Rang von M in Abhängigkeit von den Parametern u und v!

Antwort: Zutreffendes ankreuzen und ergänzen:

$rgM = 0$	◯ niemals	◯ genau, wenn ....
$rgM = 1$	◯ niemals	◯ genau, wenn ....
$rgM = 2$	◯ niemals	◯ genau, wenn ....
$rgM = 3$	◯ niemals	◯ genau, wenn ....
$rgM = 4$	◯ niemals	◯ genau, wenn ....

AUFGABE 5 : **105 Punkte**

Ein Imker möchte seinen diesjährigen Honigertrag von 60 l einer Supermarktkette verkaufen. Er verfügt noch über 125 Gläser mit einem Fassungsvermögen von je 400 g Honig und über 47 Gläser, die je 1 kg Honig fassen. Die Supermarktkette nimmt den Honig unter der Bedingung ab, daß die Lieferung höchstens fünfmal soviel kleine wie große Gläser enthält; umgekehrt soll die Zahl der 1 kg-Gläser übersteigen. Bei dem verabredeten Preis erzielt der Imker einen Gewinn von 1,20 DM je 400 g-Glas und von 2,60 DM je 1000g-Glas.

Auf wieviele Gläser jeder Sorte muß der Imker den Honig aufteilen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Wie groß ist der Maximalgewinn?

Formulieren Sie das zugehörige lineare Optimierungsproblem mathematisch und lösen Sie es auf graphischem Wege.

Lineares Optimierungsproblem:

Variablen	Bedeutung	[Maßeinheit]

- Zielfunktion:

  ....

- Restriktionen und Nichtnegativitätsbedingungen:

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Aufgabe 5 : (Fortsetzung)

Hinweis zur graphischen Lösung:

- Schraffieren Sie den zulässigen Bereich K
- Geben Sie die Koordinaten der Ecken von K an. (Berechnen Sie diese, sofern sie aus der Zeichung nicht hinreichend genau ablesbar sein sollten.)
- Zeichnen Sie eine Höhenlinie von G ein und geben Sie an, welchem Gewinn diese entspricht.

Ergebnisse:	optimale Anzahl 400 g-Gläser:	....
	optimale Anzahl 1000g-Gläser:	....
	Maximalgewinn:	....

AUFGABE 6 : **106 Punkte**

Ein Unternehmen produziert ein Gut G gemäß der Kostenfunktion

$$K(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x + 9$$

(wobei x die Ausbringungsmenge von G in ME bezeichnet).

Dieses Gut kann dann in beliebig großen Mengen zu einem konstanten Marktpreis p [GE/ME] abgesetzt werden.

a) Bei welcher Ausbringungsmenge x^* werden die geringsten Stückkosten erzielt, und wie hoch sind diese?

b) Das Unternehmen erzielt nur dann Gewinn, wenn der Marktpreis p einen gewissen Mindestwert $p_{\min}$ übersteigt; im Fall $p < p_{\min}$ dagegen werden rote Zahlen geschrieben. Geben Sie $p_{\min}$ an!

c) Welche Ausbringungsmenge $x_A(8)$ wird das Unternehmen auf den Markt bringen, wenn der Marktpreis $p = 8$ [GE / ME] beträgt?

a)	Stückkostenminimum bei	x^*	$=$
	minimale Stückkosten	$\frac{K(x^*)}{x^*}$	$=$
b)	minimaler Marktpreis	$p_{\min}$	$=$
c)	Angebotsfunktion:	$x_A(8)$	$=$

Aufgabe 6 : (Fortsetzung)

Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x + 9$

d) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{K,x}$ der Kostenfunktion bezüglich der Ausbringungsmenge x allgemein und an der Stelle x^* (vgl. Teilaufgabe a)).

e) Geben Sie die variablen Stückkosten $K_v(x)$ bei der Ausbringungsmenge $x > 0$ an und untersuchen Sie die Funktion K_v auf Wachstum, Beschränktheit und Konvexität.

Antworten:

d) Elastizitäten: $\epsilon_{K,x}(x) =$

$\epsilon_{K,x}(x^*)$ $=$

---

e) Variable Stückkosten:

$K_v(x) =$ $, x > 0.$

K_v hat folgende Eigenschaften: (**Nichtzutreffende** der **fettgedruckten** Wörter streichen!)

1) K_v ist **streng** monoton **wachsend / fallend**, denn

....

2) K_v ist **nicht** nach oben beschränkt, denn

....

K_v ist **nicht** nach unten beschränkt, denn

....

Also ist K_v **nicht** beschränkt.

3) K_v ist **konkav / konvex, und zwar / aber nicht** strikt, denn

....