Aufgabe 1 : **10 Punkte**

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie - soweit sinnvoll -

	Rechnung	**Ergebnis**
$B^T B$		
$(BB^T)^T B^T$		
$3A + B^T B$		
$det\, A$		
$det\, B^T$		
$det\, B^T B$		
$(B^T B)^{-1}$		
$det\,(A^{-1}(B^T B)^{-1})$		
$(A^T B^T B)^T (B^T B A)^{-1}$		

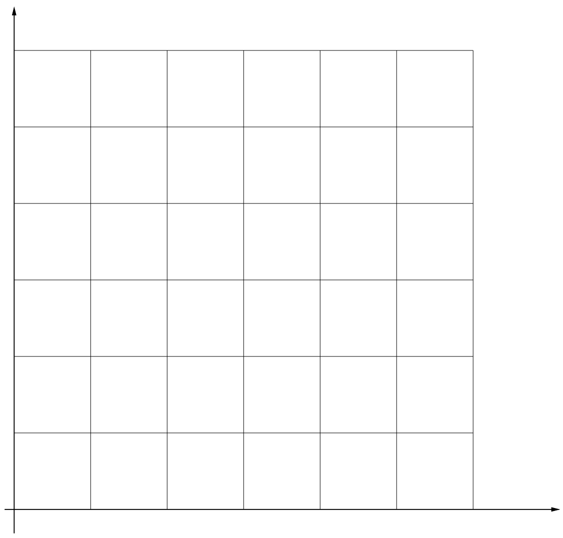
Aufgabe 2 : **12 Punkte**

Im $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \underline{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \underline{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeichnen Sie die Menge $C := conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$ schraffiert in das nachfolgende Diagramm ein[1]:



(ii) Ergänzen Sie: Es gilt $conv\,(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = conv\,(\underline{a}, \underline{b}, \underline{d})$, weil aus der Skizze erkennbar ist, daß ....

. ...

. ...

(iii) Weisen Sie anhand einer Berechnung nach, dass

$$\underline{f} \notin conv\,(\underline{a}, \underline{b}, \underline{d})$$

gilt.

[1] d.h., die kleinste konvexe Menge, die die Punkte $\underline{a}, \ldots, \underline{d}$ enthält.

Rechnung:

Ergebnis: (Interpretation der Rechnung)

Es gilt $\underline{f} \notin conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{d})$, weil

Aufgabe 3 : **14 Punkte**

Für die Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Betrieb zwei verschiedene Materialarten. Der Mengenbedarf und -vorrat ist durch folgende Tabelle gegeben:

Material	E1	E2	E3	Materialvorrat
M1	3	2	2	28
M2	1	0	4	6

Man interessiert sich für sämtliche Produktionspläne $p = (p_1, p_2, p_3)^T$, mit denen die Materialvorräte aufgebraucht werden können.

(a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dem die gesuchten Erzeugnismengen p_1, p_2, p_3 notwendigerweise genügen, und bestimmen Sie dessen allgemeine Lösung $\mathbb{L}$ in Form einer Parameterdarstellung

(b) Stellen Sie die Teilmenge $\mathbb{L}_{oec}$ ökonomisch sinnvoller (d.h., nichtnegativer) Lösungen von $\mathbb{L}$

- in Form einer Parameterdarstellung
- graphisch (in nachfolgendem Diagramm)

dar.

(c) Bestimmen Sie die Teilmenge $\mathbb{L}_{oec,ganz}$ derjenigen Produktionspläne aus $\mathbb{L}_{oec}$, die ganzzahlige Komponenten haben.

(d) Welcher ganzzahlige Produktionsplan ergibt eine mengenmäßig maximale Gesamtproduktion?

Rechnung:

Lösung des Gleichungssystems:

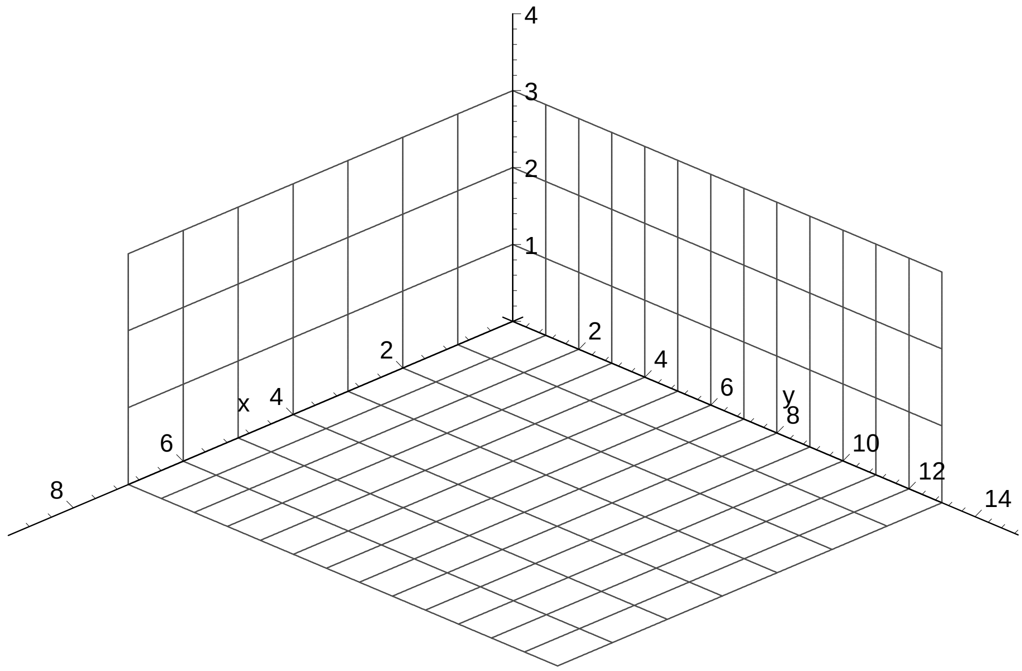
$$\mathbb{L} = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\}$$

ökonomisch sinnvolle Lösungsteilmenge:

$$\mathbb{L}_{oec} = \left\{ \qquad \right\}$$

Rechnungen (Ungleichungen angeben!):

Skizze von $\mathbb{L}_{oec}$: (Bitte 2 Punkte von $\mathbb{L}_{oec}$ beschriften!)



Menge ganzzahliger Produktionspläne:

$$\mathbb{L}_{oec,ganz} = \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \right\}$$

daraus der Produktionsplan mit maximaler Gesamtproduktion: $\underline{p} =$

<u>Rechnung:</u> (Ganzzahligkeitsbedingungen angeben!)

Aufgabe 4 : **18 Punkte**

Zur Deckung des Vitaminbedarfes von Leistungssportlern stehen in einem Trainingscamp 2 Multivitaminpräparate "MultiVit" und "Fit & Power" - jeweils in Tablettenform - zur Verfügung. Der Gehalt dieser Präparate an wichtigen Inhaltsstoffen sowie die jeweilige Mindesttagesdosis je Sportler sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	"MultiVit" je Tablette	"Fit & Power" je Tablette	Tagesbedarf pro Person
Vitamin C	180 mg	40 mg	360 mg
Vitamin B_{12}	12 μg	15 μg	60 μg
Folsäure	9 mg	21 mg	63 mg
Preis:	0,60 DM	0,90 DM	

Die Multivitamintabletten sind so zu dosieren, daß der Tagesbedarf jedes Sportlers an den Vitaminen C und B_{12} sowie an Folsäure zu minimalen Kosten gedeckt werden kann.

Festlegung der Variablen:

Variable	Bedeutung	Maßeinheit
x		
y		

Restriktionen und Nichtnegativitätsbedingungen

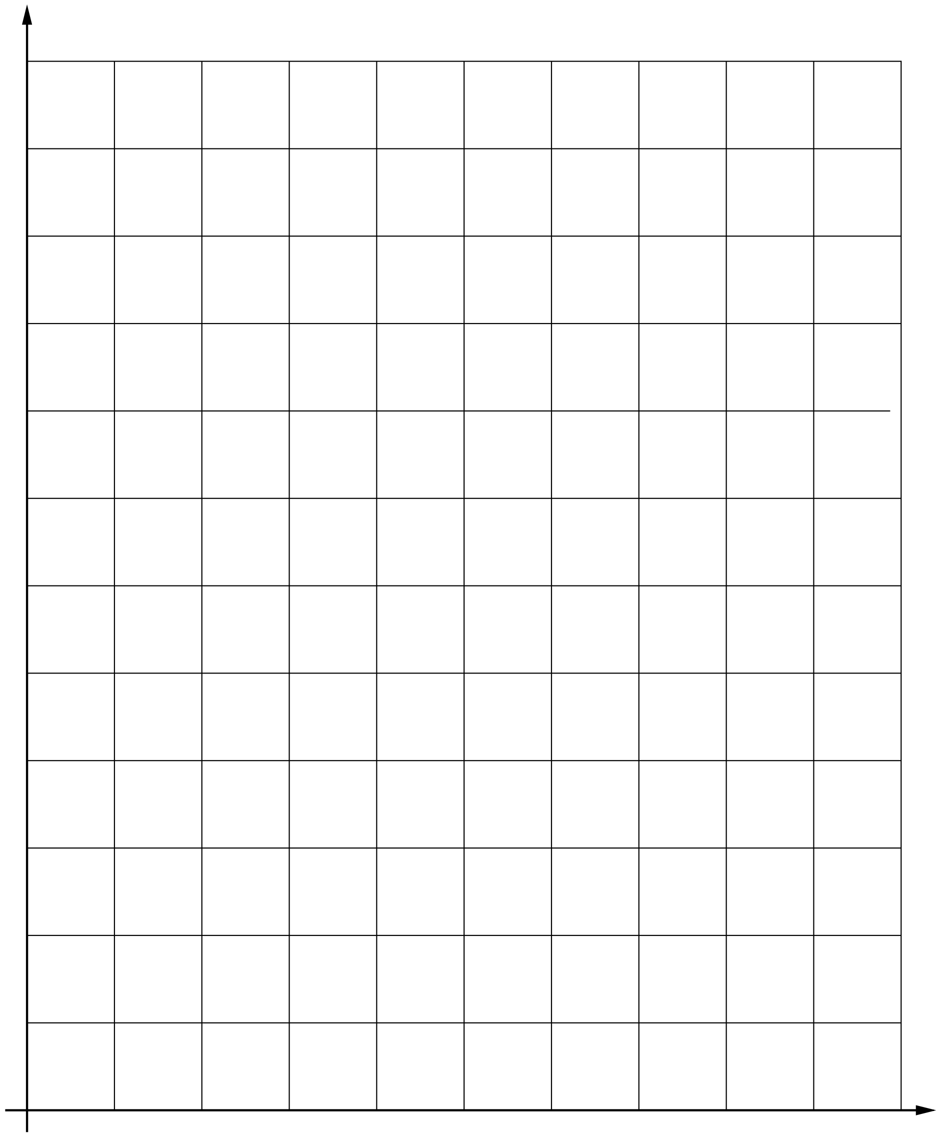
Nr.	Ungleichung	Bedeutung
(U1)		
(U2)		
(U3)		
(U4)		
(U5)		

Zielfunktion

$Z(x, y) =$ $\longrightarrow$

Skizze:

- Restriktionsgeraden einzeichnen und beschriften
- konvexe Hülle des zulässigen ganzzahligen Gitters kennzeichnen
- eine Isoquante der Zielfunktion einzeichnen und beschriften
- Optimalpunkt kennzeichnen



Ergebnis: Optimale Dosierungen und minimaler Preis

"MultiVit"	Stck.
"Fit & Power"	Stck.
Gesamtpreis pro Person	DM

Ein Chemieunternehmen produziert ein Lösungsmittel. Bei einer Ausbringung von x Tonnen $[t]$ des Lösungsmittels entstehen Durchschnittskosten in Höhe von

$$k(x) = 4x + 7 + \frac{144}{x}, x > 0,$$

Tausend Dollar je Tonne $[T\$/t]$.
Bestimmen Sie:

- die (Gesamt-) Kostenfunktion

$K(x) =$	Maßeinheit

- die Fixkosten

$K_f =$	Maßeinheit

- die Grenzkostenfunktion

$=$	Maßeinheit

- den Output im Betriebsoptimum

$x_{B0} =$	Maßeinheit

- das Stückkostenminimum

$\min_{x>0} k(x) =$	Maßeinheit

- den (konstanten) Marktpreis p, zu dem das Unternehmen $11t$ Lösungsmittel produzieren wird

$p =$	Maßeinheit

sowie unter Zugrundelegung des soeben ermittelten Marktpreises

- den maximal möglichen Gewinn

$G_{max} =$	Maßeinheit

- die Gewinnschwelle (*exakte Angabe <u>ohne</u> Taschenrechner*)

$x_S =$	Maßeinheit

- die Gewinngrenze (*exakte Angabe <u>ohne</u> Taschenrechner*)

$x_G =$	Maßeinheit

Bei Unterschreitung welchen Marktpreises p_{min} kann das Unternehmen keinen Gewinn mehr erzielen?

$p_{min} =$

Aufgabe 6a : **8 Punkte**

Bei der Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}\,x_1 & +\cdots+ & a_{1n}\,x_n & = y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & +\cdots+ & a_{mn}\,x_n & = y_n \end{array} \tag{1}$$

mit Hilfe des Austauschverfahrens entsteht folgendes Tableau:

	x_2	x_5	1
x_3	7	-1	-5
z_2	0	a	0
x_1	2	0	2
x_4	3	-2	8
z_5	0	0	c

mit gewissen Konstanten a und c.

Ergänzen Sie:

- Genau dann handelt es sich um ein Ergebnistableau, wenn gilt $\boxed{\quad = \quad}$

  verbale Begründung:

  . ...

  . ...

  . ...

  In diesem Fall gilt:

- Anzahl der Unbekannten $n = \boxed{\quad}$
- Anzahl der Gleichungen $m = \boxed{\quad}$
- Rang der Koeffizientenmatrix $r = \boxed{\quad}$
- Defekt der Koeffizientenmatrix $d = \boxed{\quad}$
- das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt $\boxed{\quad = \quad}$
- die Determinante der Koeffizientenmatrix hat den Wert $\boxed{\quad}$

Aufgabe 6b : **8 Punkte**

Belegen Sie anhand je eines passend gewählten Gegenbeispiels, daß die nachfolgenden Aussagen **falsch** (d.h., nicht allgemeingültig) sind:

''Für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$, beliebige Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \in \mathbb{R}^n$ und beliebige $(n,n)-$Matrizen A, B gilt: ... ''

(i) $det\ (A - B) = det\ A - det\ B$
Gegenbeispiel:

(ii) Wenn die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ linear abhängig sind, lassen sich mindestens zwei davon als Linearkombination der übrigen darstellen.
Gegenbeispiel:

(iii) $\underline{a} \leq \underline{b} \leq \underline{c} \quad \Rightarrow \quad \underline{b} \in conv(\underline{a}, \underline{c})$
Gegenbeispiel:

(iv) $\underline{a} \perp\!\!\!\perp \underline{b} \ \wedge \ \underline{b} \perp\!\!\!\perp \underline{c} \quad \Rightarrow \quad \underline{a} \perp\!\!\!\perp \underline{c}$
(" $\perp\!\!\!\perp$ " *steht für "linear unabhängig"*)
Gegenbeispiel: