AUFGABE 1 : **16 Punkte**

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $(A - 2C^T)^T = \begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}$

b) $detB =$0, denn beide Spalten von B sind identisch

c) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1 : (Fortsetzung)

Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

d) $det ABD^{-1}$ $=(\det A)(\det B)(\det D^{-1})=0$ wegen det $B = 0$

---

e) $det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = -6$

---

f) Ermitteln Sie die Matrix X aus

$(D^{-1}X - B)D = I$

Antwort: $X = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$

zu f)

$$\begin{array}{lrll} & (D^{-1}X - B)D & = I & \quad || \cdot D^{-1} \text{ von rechts} \\ \Rightarrow & D^{-1}X - B & = D^{-1} & \quad || \cdot D \text{ von links} \\ \Rightarrow & X - DB & = I & \\ \Rightarrow & X & = I + DB & \\ & & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & \\ & & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 23 \\ 18 & 18 \end{pmatrix} & \end{array}$$

g) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -35 \\ 1 & 12 & -38 \\ -4 & -47 & 150 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Determinante und die Inverse von A (letztere, falls sie existiert).

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$det A = 1$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|} 1 & 11 & -35 & 1 & -11 & 35 & 12 & -11 & 2 & 14 & -5 & 2 \\ 1 & 12 & -38 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3 & 2 & 10 & 3 \\ -4 & -47 & 150 & -4 & -3 & 10 & -1 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline * & -11 & 35 & -1 & * & 3 & 1 & 3 & * & & & \end{array}\right.$$

Berechnung der Determinante:

$(+1) \cdot (+1) \cdot (+1) = 1$

AUFGABE 2 : **8 Punkte**

Gegeben seien die Punkte $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ und $\underline{d} \in \mathbf{R}^2$ mit

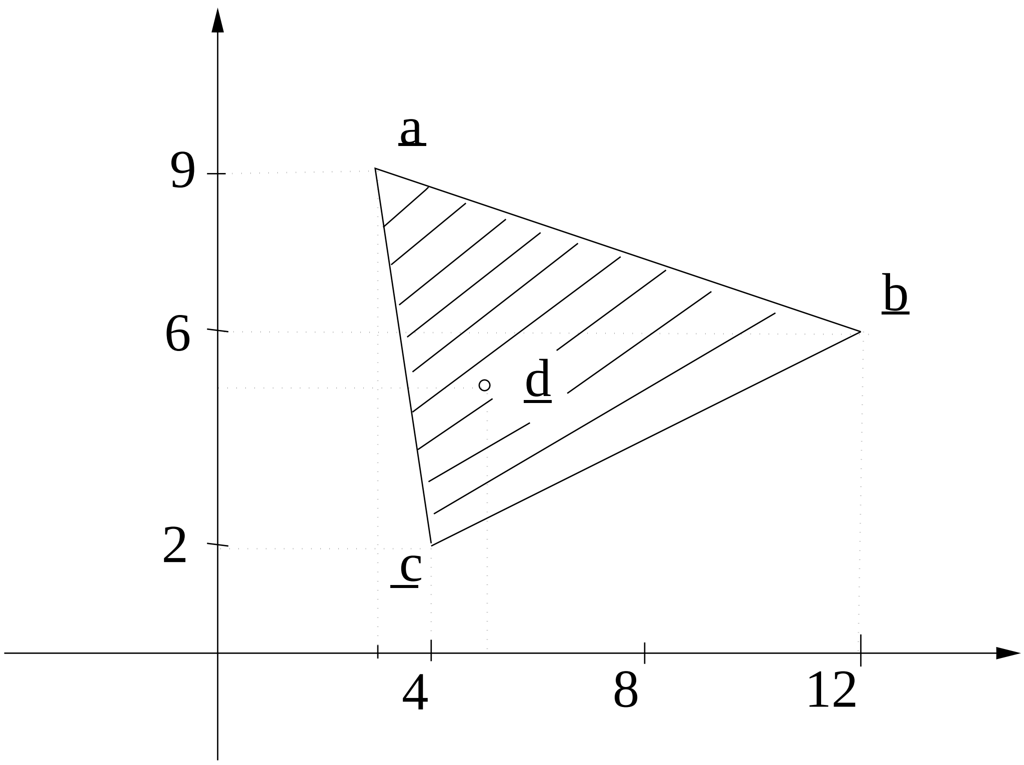
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

.

a) Tragen Sie die Punkte $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ und $\underline{d}$ in das nachfolgende Koordinatensystem ein und beschriften Sie sie. Zeichnen Sie dann die konvexe Hülle[1]

$$conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$$

<u>schraffiert</u> in das Diagramm ein.



[1] d.h. die Menge aller konvexen Linearkombinationen, die aus $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ gebildet werden können

Erinnerung:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

.

b) Berechnen Sie Zahlen α, β, γ so, daß

$$\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$$

eine konvexe Linearkombination ist.

(Hinweis: Stellen Sie eine entspechendes Gleichungssystem auf und lösen Sie es. Beachten Sie eventuelle Nebenbedingungen.)

$\alpha = 1/3$	$\beta = 1/6$	$\gamma = 1/2$

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \\ 9 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Nebenbedingung $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$

Lösung:

α	β	γ	1		β	γ	1		β	1		
3	12	4	-5		9	1	-2	γ	-9	2	γ	1/2
9	6	2	-5		-3	-7	4		60	-10	β	1/6
1	1	1	-1	α	-1	-1	1	α	8	-1	α	1/3
	-1	-1	1		-9	$*$	2		$*$	1/6		

AUFGABE 3 : 15 Punkte

Ein Imker möchte seinen diesjährigen Honigertrag von 60 kg einer Supermarktkette verkaufen. Er verfügt noch über 125 Gläser mit einem Fassungsvermögen von je 400 g Honig und über 47 Gläser, die je 1 kg Honig fassen. Die Supermarktkette nimmt den Honig unter der Bedingung ab, daß die Lieferung höchstens fünfmal soviel kleine wie große Gläser enthält; umgekehrt soll die Zahl der 1 kg-Gläser 60% der Anzahl von 400 g-Gläsern nicht übersteigen. Bei dem verabredeten Preis erzielt der Imker einen Gewinn von 1,20 DM je 400 g-Glas und von 2,60 DM je 1000g-Glas.

Auf wieviele Gläser jeder Sorte muß der Imker den Honig aufteilen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Wie groß ist der Maximalgewinn?

Formulieren Sie das zugehörige lineare Optimierungsproblem mathematisch und lösen Sie es auf graphischem Wege.

Lineares Optimierungsproblem:

-

Variablen	Bedeutung	[Maßeinheit]
x	Anzahl 400g - Gläser	Stück
y	Anzahl 1000g - Gläser	Stück

- Zielfunktion:

$$G(x,y) = 1,2x + 2,6y \quad \text{[DM]} \qquad \to \max$$

- Restriktionen und Nichtnegativitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
0,4x + y &\leq 60 \text{ Honigmenge} && (1)\\
1/5x - y &\leq 0 \text{ bzw. } x \leq 5y \text{ (Abnahmerestriktion)} && (2)\\
-0,6x + y &\leq 0 \text{ bzw. } y \leq 0,6x \text{ (Abnahmerestriktion)} && (3)\\
x &\leq 125 && (4)\\
y &\leq 47 && (5)\\
x &\geq 0 && (6)\\
y &\geq 0 && (7)
\end{aligned}$$

Höhenlinien $G(x,y) = G$ ermitteln:

Variante 1
Falls $G \neq 0$ ist, gilt
$G = 1,2x + 2,6y \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{G/1,2} + \frac{y}{G/2,6}$
(Abschnittsform).
Man wählt G passend, z. B. G=156:

$$1 = \frac{x}{130} + \frac{y}{60}$$

Diese Linie ist eingezeichnet.

Variante 2
$G = 1,2x + 2,6y \Leftrightarrow y = \frac{G}{2,6} - \frac{6}{13}x$
Für G=156 folgt

$$y = 60 - \frac{6}{13}x$$

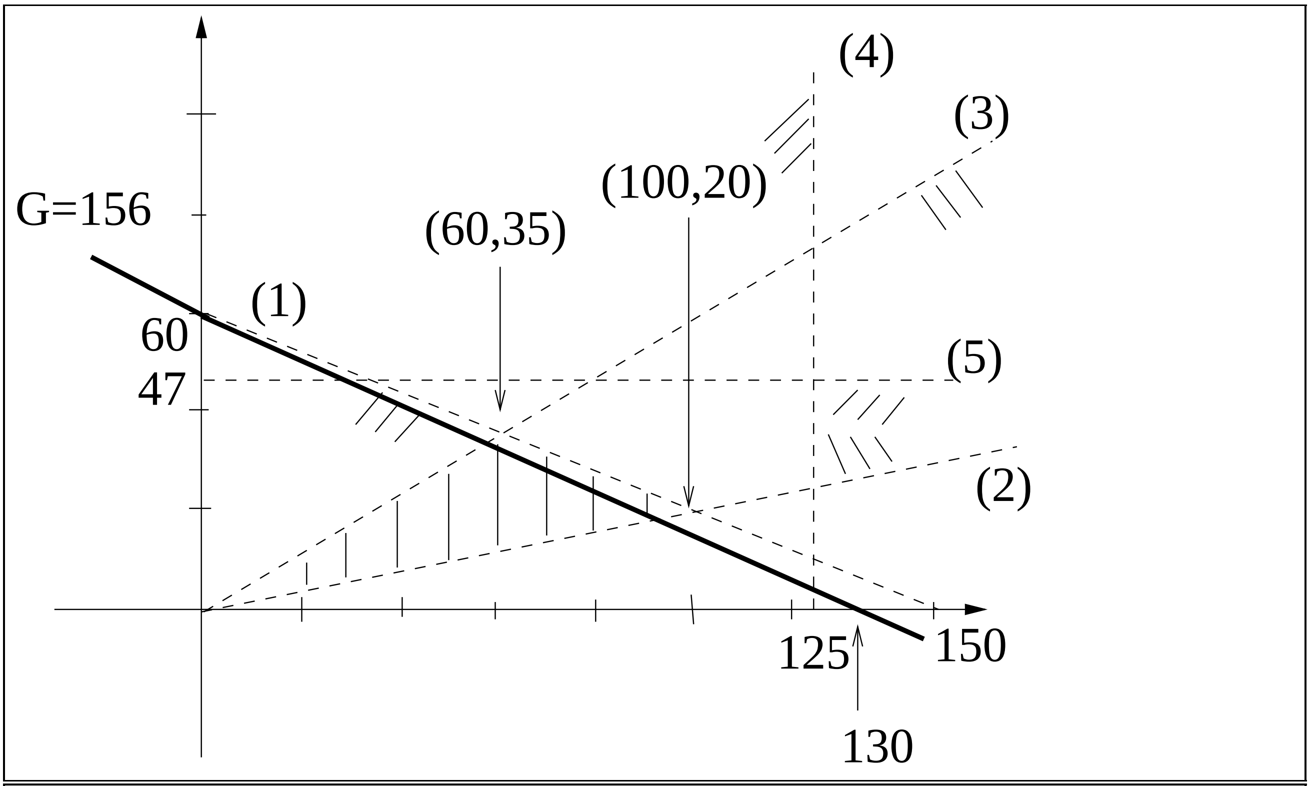
Variante 3
Normalenvektor jeder Höhenlinie ist $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,6 \end{pmatrix}$ bzw. beliebige Vielfache davon, z. B. $\begin{pmatrix} 36 \\ 78 \end{pmatrix}$.
Diesen kann man z. B.
- am Ursprung
- am Punkt $(0;60)$
beginnend abtragen und die Höhenlinie
- $G(x,y) = 0$ bzw.
- $G(x,y) = 156$

senkrecht dazu einzeichnen.

Variante 4 (Parameterdarstellung)
Ein Richtungsvektor jeder Höhenlinie ist $\underline{r} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ -1,2 \end{pmatrix}$ bzw. beliebige (nichttriviale) Vielfache .
Mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$ als "Pinpunkt" ergibt sich die eingezeichnete Höhenlinie

Hinweis zur graphischen Lösung:

- Schraffieren Sie den zulässigen Bereich K
- Geben Sie die Koordinaten der Ecken von K an. (Berechnen Sie diese, sofern sie aus der Zeichung nicht hinreichend genau ablesbar sein sollten.)
- Zeichnen Sie eine Höhenlinie von G ein und geben Sie an, welchem Gewinn diese entspricht.



Ergebnisse:	optimale Anzahl 400 g-Gläser:	100 St.
	optimale Anzahl 1000g-Gläser:	20 St.
	Maximalgewinn:	172 DM

AUFGABE 4 : 15 Punkte

Ein Unternehmen produziert ein Gut G gemäß der Kostenfunktion

$$K(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x + 9$$

(wobei x die Ausbringungsmenge von G in ME bezeichnet).

Dieses Gut kann dann in beliebig großen Mengen zu einem konstanten Marktpreis p [GE/ME] abgesetzt werden.

a) Bei welcher Ausbringungsmenge x^* werden die geringsten Stückkosten erzielt, und wie hoch sind diese?

b) Das Unternehmen erzielt nur dann Gewinn, wenn der Marktpreis p einen gewissen Mindestwert $p_{\min}$ übersteigt; im Fall $p < p_{\min}$ dagegen werden rote Zahlen geschrieben. Geben Sie $p_{\min}$ an!

c) Welche Ausbringungsmenge $x_A(8)$ wird das Unternehmen auf den Markt bringen, wenn der Marktpreis $p = 8$ [GE / ME] beträgt?

a)	Stückkostenminimum bei	x^*	$=$	6 [ME]
	minimale Stückkosten	$\frac{K(x^*)}{x^*}$	$=$	6,25 [GE/ME]
b)	minimaler Marktpreis	$p_{\min}$	$=$	6,25 (=Stückkostenminimum)
c)	Angebot:	$x_A(8)$	$=$	$\begin{cases} 2p - 13/2 & \text{für } p \geq 13/4 \\ 0 & \text{für } p < 13/4 \end{cases}$

Nebenrechnung

a)

Stückkosten: $k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ für $x > 0$ [GE/ME]; hier $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} + \dfrac{9}{x} = k(x)$

Ansatz: $k'(x) = \dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{x^2}$ für $x > 0$

$k''(x) = \dfrac{18}{x^3} > 0$ für $x > 0 \rightarrow$ k strikt konvex.

$k' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ wegen $x \geq 6$

strikter globaler Minimumpunkt wegen strikter Konvexität.

$$k(6) = \frac{6}{4} + \frac{13}{4} + \frac{9}{6} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x + 9$

d) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{K,x}$ der Kostenfunktion bezüglich der Ausbringungsmenge x allgemein und an der Stelle x^* (vgl. Teilaufgabe a)).

e) Geben Sie die variablen Stückkosten $K_v(x)$ bei der Ausbringungsmenge $x > 0$ an und untersuchen Sie die Funktion K_v auf Wachstum und Konvexität.

Antworten:

d) Elastizitäten:

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{13}{4}x}{\frac{x^2}{4} + \frac{13}{4}x + 9} = \frac{2x^2 + 13x}{x^2 + 13x + 36}$$

$$\varepsilon_{K,x}(x^*) = 1$$

---

e) Variable Stückkosten (*):
$K_v(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x$ $\qquad k_v(x) = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}, \qquad x > 0.$

K_v hat folgende Eigenschaften:

1) K_v ist **streng** monoton **wachsend**

   k_v ist **streng** monoton **wachsend**

2) K_v ist **strikt konvex**.

   k_v ist **sowohl konkav als auch konvex, aber nicht** strikt.

(*) **Anmerkung:** Die Aufgabenstellung enthielt im Teil e) einen Druckfehler: Statt K_v mußte es k_v heißen. Daher werden hier zwei Lösungen wiedergegeben: Die erste (grün) unterstellt, die Aufgabe beziehe sich auf K_v, die zweite (blau), es sei k_v gemeint. Beide Lösungen wurden als richtig bewertet.

AUFGABE 5 : 6 Punkte

Gegeben seien zwei (n,n)-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Wir betrachten die Gleichung

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig $\boxed{\text{R}}$, und welche falsch $\boxed{\text{F}}$ (Zutreffendes ankreuzen!)

Die Gleichung

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

(1) $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\xcancel{\text{F}}}$ gilt immer wegen(6)

(2) $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\xcancel{\text{F}}}$ gilt niemals denn z. B. $(I-I)^2 = I^2 - 2II + I^2$

(3) $\boxed{\xcancel{\text{R}}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt für $n = 1$. Binomischer Satz

(4) $\boxed{\xcancel{\text{R}}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt, wenn $AB = BA$ ist. siehe (*)

(5) $\boxed{\xcancel{\text{R}}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt, wenn $B = I$ (Einheitsmatrix) ist. siehe (2)

(6) $\boxed{\xcancel{\text{R}}}$ $\boxed{\text{F}}$ gilt nur, wenn $AB = BA$ gilt. siehe (*)

(*) zu (4) und (6)
Es gilt

$$\begin{aligned}(A-B)^2 &= (A-B)(A-B)\\ &= A(A-B) - B(A-B)\\ &= A^2 - AB - BA + B^2\end{aligned}$$

und somit $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.