AUFGABE 1 :

Es seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

gegeben. Berechnen Sie – soweit sinnvoll –

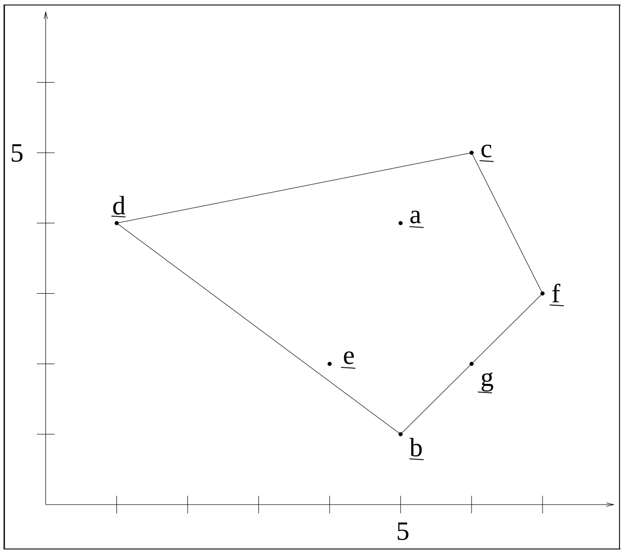
	Rechnung	Ergebnis
CD	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix}$
$D(A-B)$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 24 \\ -5 & 16 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
$D^T C^T$	$(CD)^T$	$\begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
$(A-C)D$	**ex. nicht:** **Format** $(A) = (2,2) \neq (3,2)$ **=Format von** D	/
$\det A$	$(-2) : 2 - 7 \cdot 0$	-4
$\det(BC^T)$	BC^T **ex. nicht (Formatevergleich)**	/
$\operatorname{rg} C$	$\begin{array}{ccc\|c\|cc} x_1 & x_2 & x_3 & & x_1 & x_3 \\ \hline 3 & -1 & 2 & x_2 & & \\ 6 & 5 & 7 & & 21 & 17 \\ \hline 3 & * & 2 & & * & -17/21 \end{array}$ **2 Tauschschritte**	2
A^{-1}	$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 7/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
$\det(AA^{-1})$	=det I=det $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1

AUFGABE 2 :

Gegeben seien die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Skizzieren Sie die konvexe Hülle $\mathcal{H} = conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}, \underline{f})$



(ii) Schreiben Sie $\mathcal{H}$ als konvexe Hülle möglichst weniger der Punkte $\underline{a}, \ldots, \underline{f}$ (ohne Rechnung!)

Antwort

$\mathcal{H}$=conv($\boldsymbol{\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{f}}$)

(iii) Entscheiden Sie, ob der Punkt $\underline{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{H}$ liegt.

(Begründung zeichnerisch oder rechnerisch!)

Antwort

$\underline{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ **liegt** in $\mathcal{H}$, weil

$\boldsymbol{\underline{g}}$ **konvexe LK von** $\boldsymbol{\underline{b}}$ **und** $\boldsymbol{\underline{f}}$ **ist:**

$$\boldsymbol{\underline{g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{f}}$$

AUFGABE 3 :

Ein Unternehmen stellt aus 3 Rohstoffen R_1 – R_3 zwei Produkte P_1 und P_2 her. Die Produktionsdaten sind:

spezifische Verbrauchsmatrix: $V = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 24 & 15 \\ 56 & 35 \end{bmatrix}$ Rohstoffvorratsvektor: $\underline{r} = \begin{bmatrix} 40 \\ 120 \\ r \end{bmatrix}$

Der Wert $r = \underline{r}_3$ kann zu Produktionsbeginn noch beeinflußt werden.

Bestimmen Sie den Vorratswert $r = \underline{r}_3$ so, daß die Vorräte restlos aufgebraucht werden können, und geben Sie die Menge $\mathbb{L}_{oec}$dazu geeigneter Produktionspläne $\underline{p} = (p_1, p_2)^\top$

- formelmäßig (z. B. Parameterdarstellung) und
- in Form einer Skizze an!

Befindet sich ein Produktionsplan mit $p_1 = 3$ [ME] darunter?

Tips: - *Passendes Gleichungssystem aufstellen!*

- *Lösbarkeit untersuchen (in Abhängigkeit von r)!*
- *Lösungsmenge ermitteln und auf ökonomisch sinnvolle Lösungen einschränken!*

Lösung

•Ansatz:

$$\begin{array}{llll} V\underline{p} & = \underline{r} & (*) & \| \quad \text{“Produktionsverbrauch=Vorrat ”} \\ \underline{p} & \geq 0 & (\text{NN}) & \| \quad \text{Produktionsmengen sind nichtnegativ} \end{array}$$

•Lösung des Gleichungssystems (*):

	p_1	p_2	1		p_1	1
h_1	8	5	-40	p_2	$-8/5$	8
h_2	24	15	-120	h_2	0	0
h_3	56	35	$-r$	h_3	0	$280-r$
	$-8/5$	$*$	8			

Man liest ab:

(1) rg $V = 1$

(2) $\text{rg}\,(V \vdots \underline{r}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r = 280 \quad (\Leftrightarrow \text{GLS } (*) \text{ lösbar }) \\ 2 & \text{falls } r \neq 280 \quad (\Leftrightarrow \text{GLS } (*) \text{ unlösbar }) \end{cases}$

Falls $v = 280$ **gilt, ergibt sich die Lösungsmenge des GLS (*) zu**

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -8/5 \end{pmatrix} \mid p_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

(geometrische Deutung: gerade im $\mathbb{R}^2$)

•Hinzunahme der Nichtnegativitätsbedingungen (NN)

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - 8/5P - 1 \geq 0 \Leftrightarrow p_1 \leq 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow p_1 \in [0, 5]$$

Die <u>ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge</u> $\mathbb{L}_{oec}$ ergibt sich zu

$$\mathbb{L}_{oec} \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -8/5 \end{pmatrix} \mid p_1 \in [0,5] \right\}$$

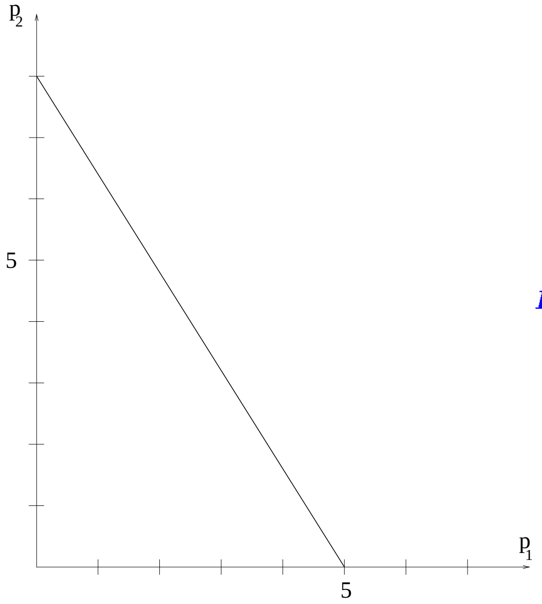
(geometrische Deutung: <u>Strecke</u> im $\mathbb{R}^2$)

Ergebnisse:

- Die Vorräte können dann und nur dann restlos aufgebraucht werden, wenn $r = \boxed{\mathbf{280}}$ [ME] gilt.
- Die Menge zugehöriger $\mathbb{L}_{oec}$ Produktionspläne ist gegeben durch die Formel

$$\mathbb{L}_{oec} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -8/5 \end{pmatrix} \mid p_1 \in [0, 5] \right\}$$

und die Skizze



$$\mathbb{L}_{oec} = \mathrm{conv}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

- Will man 3 ME von P_1 herstellen, so

müssen $\boxed{\mathbf{3,2}}$ ME von P_2 erzeugt werden, um die Vorräte aufzubrauchen.

Nebenrechnung:

$$p_2 = 8 - \frac{8}{5} p_1 = 8 - \frac{8}{5} \cdot 3 = \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$$

AUFGABE 4 :

Ein Landwirt will seine 11 ha Land mit Kartoffeln und Gerste bestellen. Die Anbauflächen sollen so bestimmt werden, daß ein maximaler Gesamtgewinn erwartet werden kann. Folgende weitere Informationen stehen zur Verfügung:

			Kartoffeln	Gerste	Limit bzw. Vorrat	
1	Arbeitszeit	[h/ha]	45	30	450	h
	Herbizide	[kg/ha]	200	-	1 800	kg
	Gewinn	[DM/ha]	3,75	2	-	TDM

2 Das Verhältnis Gerstenanbaufläche : Kartoffelanbaufläche soll nicht größer sein als 3:2.

Ermitteln Sie

- die gewinnmaximalen Anbauflächen für Kartoffeln und Gerste,
- den maximalen Gewinn,
- die Mengen an unverbrauchten Ressourcen (soweit vorhanden)

Mathematische Formulierung:

Variable	Maßeinheit	Bedeutung
k	**[ha]**	**Anbaufläche für Kartoffeln**
g	**[ha]**	**Anbaufläche für Gerste**

Restriktionen (R)					Bedeutung
1	$k + g$	$\geq$	11	**[ha]**	**Anbaufläche**
2	$45k + 30g$	$\leq$	450	**[h]**	**Arbeitszeit**
3	$200k$	$\leq$	$1\,800$	**[kg]**	**Herbizide**
4	g/k	$\leq$	$3/2$		**Flächenanteile**

Nichtnegativitätsbedingungen (NN):

$k \geq 0, g \geq 0$

Zielfunktion: $G(k, g) = 7k + 3,5g$ $\rightarrow$ max

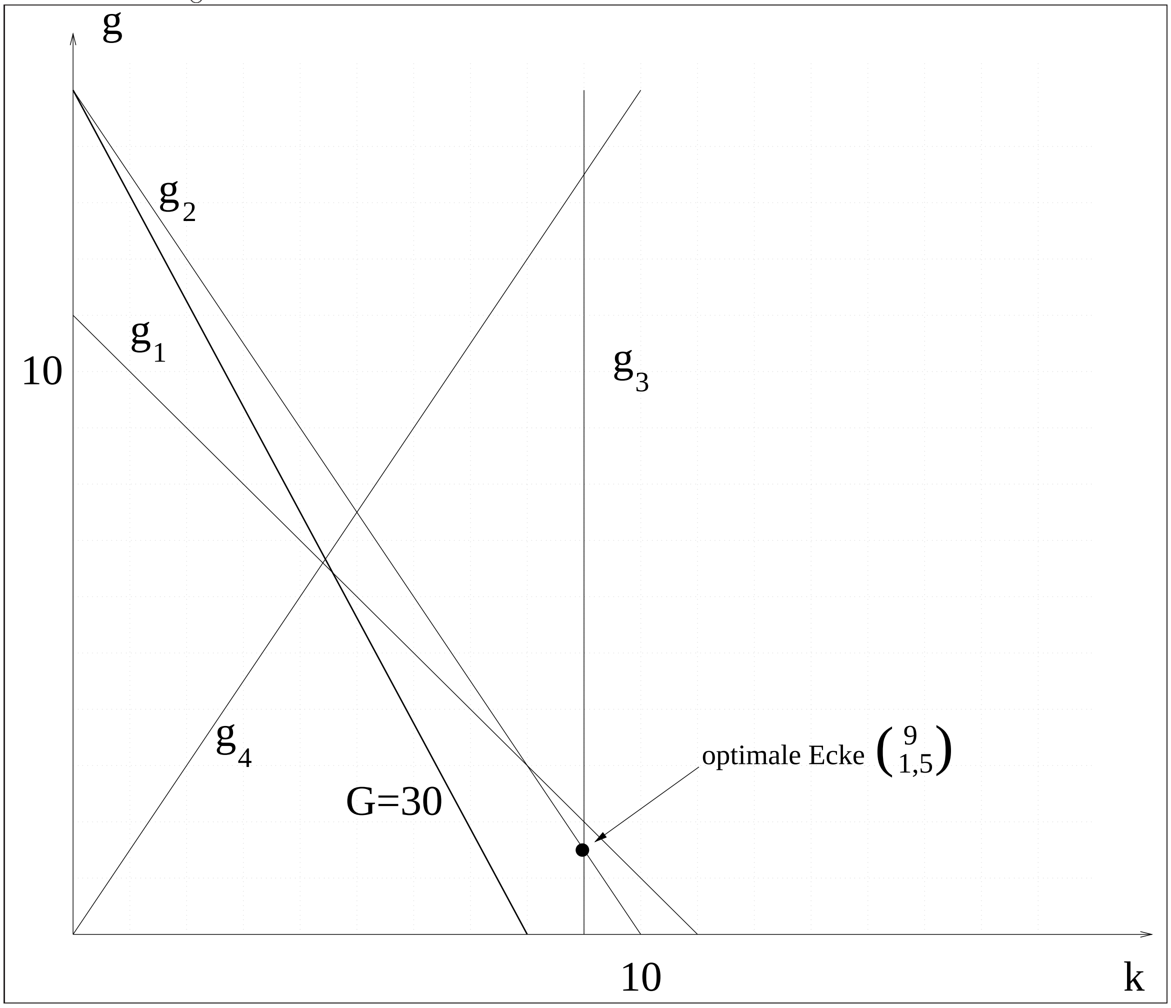
Nebenrechnungen:

$$\frac{g}{k} \leq \frac{3}{2} \leftrightarrow g \leq \frac{3}{2}k \leftrightarrow -\frac{3}{2}k + g \leq 0$$

Assoziierte Geraden:

$$\begin{array}{llcl}
1) & \frac{k}{11} + \frac{g}{11} & = 1 & (g1) \\
2) & \frac{k}{10} + \frac{g}{15} & = 1 & (g2) \\
3) & k & = 9 & (g3) \\
4) & \qquad g & = \frac{3}{2}k & (g4)
\end{array}$$

Grafische Lösung:



- Restriktionsgeraden einzeichnen, zulässigen Bereich schraffieren!
- Gewinn-Isoquante $G = 30$ [TDM] einzeichnen!
- Koordinaten der optimalen Ecke <u>berechnen</u>!

Ergebnisse:

Optimale Anbaufläche für	Kartoffeln	$=$	$\mathbf{9}$	ha
Optimale Anbaufläche für	Gerste	$=$	$\mathbf{1,5}$	ha
Optimaler Gewinn		$G^* =$	$\mathbf{36,75}$	TDM
Nicht verbraucht:	Anbaufläche		$\mathbf{0,5}$	ha
	Arbeitszeit		$\mathbf{-}$	h
	Herbizide		$\mathbf{-}$	kg

Rechnungen:

$$\mathbf{9 \times 3,75 + 1,5 \times 2 =}$$
$$\mathbf{9 \times \frac{15}{4} + 3 = \frac{135}{4} + 3 = 33,75 + 3}$$

AUFGABE 5 :

Die Gesamtkostenfunktion eines Unternehmens lautet

$$K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18 \qquad [GE], \quad x \geq 0$$

wobei x die Ausbringungsmenge des produzierten Gutes (in [ME]) bezeichnet. Das Gut kann zu einem konstanten Marktpreis p [GE/ME] in beliebiger Menge abgesetzt werden.

(1) Bestimmen Sie

a) die Grenzkostenfunktion: Maßeinheit

$\boldsymbol{K'(x) = \frac{1}{4}x + 7}$ **[GE/ME]**

b) die Stückkostenfunktion: Maßeinheit

$\boldsymbol{K(x) = \frac{1}{8}x + 7 + \frac{18}{x} \quad (x > 0)}$ **[GE/ME]**

c) die variablen Kosten (als Funktion): Maßeinheit

$\boldsymbol{K_V(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x}$

d) die variablen Stückkosten (als Funktion): Maßeinheit

$\boldsymbol{K_V(x) = \frac{1}{8}x + 7}$

e) die Grenzkosten an der Stelle $x = 5$: Maßeinheit

$\boldsymbol{K'(5) = 8,25}$ **[GE/ME]**

Interpretieren Sie den unter d) gefundenen Wert!

Ändert man die Ausbringungsmenge um eine marginale Einheit, so werden sich die Gesamtkosten ca. um 8,25 marginale Einheiten ändern

(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

(2) Ermitteln Sie das Stückkostenminimum k_{min} und den zugehörigen Output x_{BO} (d. h. das sog. Betriebsoptimum).
(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

Stückkostenminimum $k_{min} =$ $\boxed{\mathbf{10\,[GE/ME]}}$

Betriebsoptimum $x_{BO} =$ $\boxed{\mathbf{12\,[ME]}}$

Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{1}{8}x + 7 + \frac{18}{x} \quad (x > 0)$

$k'(x) = \frac{1}{8} - \frac{18}{x^2}$

$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \cdot 18 = 144 \Leftrightarrow \underline{x = 12}$

(nur pos. x **werden auf dem ökonomischen Definitionsbereich betrachtet)** $k''(x) = \frac{36}{x^3}$ $(> 0$**für** $x > 0)$

Das Stückkostenminimum wird bei $x_{BO} = 12$**erreicht**

$k_{min}(x_{BO}) = \frac{12}{8} + 7 + \frac{18}{12} = 1,5 + 7,1,5 = 10[GE/ME]$

(3) Beschreiben Sie verbal, wie sich das Unternehmen in den folgenden Fällen verhalten wird:

Fall	Das Unternehmen wird ...
$p > k_{min}$	**Etwas mehr als das Betriebsoptimum produzieren (nämlich die gewinnmaximale Ausbringungsmenge), und zwar mit positivem Gewinn.**
$p = k_{min}$	**exakt** x_{BO} **produzieren, dabei allerdings weder Gewinn noch Verlust erzielen. Alle anderen Verhalten führen zu Verlusten!**

(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

(4) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle x_s, Gewinngrenze x_g, den gewinnmaximalen Output x_{opt}, sowie den Maximalgewinn G_{max} unter der Annahme, daß der konstante Marktpreis $p = 12$ [GE/ME] beträgt.
(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

Antworten:

Gewinnschwelle	$x_s =$	**4** [ME]
Gewinngrenze	$x_g =$	**36** [ME]
gewinnmaximaler Output	$x_{opt} =$	**20** [ME]
Gewinnmaximum	x_{max}	**32** [GE]

Nebenrechnung:
Hier Erlösfunktion $E(x) = 12x$

Gewinn $G(x) = E(x) - K(x) = 12x - \left(\frac{1}{8}x^2 + 7x + 18\right)$

$= -\frac{1}{8}x^2 + 5x - 18$

$= -\frac{1}{8}(x^2 - 40x + 144)$

$$\begin{aligned} G(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 40x + 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1, x_2 \qquad &= 20 \pm \sqrt{400 - 144} = 20 \pm \sqrt{256} \\ &= 20 \pm 16 \end{aligned}$$

$x_1 = 4, x_2 = 36$

$G'(x) = \frac{1}{8}(2x - 40), \quad G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$G''(x) = \frac{1}{4}$ → **G strikt konkav** → **absolutes Maximum bei** $x = 20$

$G(20) = 12 \cdot 20 - \left(\frac{1}{8} \cdot 400 + 7 \cdot 20 + 18\right)$
$\quad = -50 + 100 - 18 = 32[\text{GE}]$

AUFGABE 6 :

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
(Zutreffendes in die Tabelle einfügen!)

	Aussage	Beurteilung:
(1)	Wenn eine beliebige quadratische Matrix A eine Inverse besitzt, sind alle Spalten von A linear unabhängig.	
(2)	Wenn eine (3,3)-Matrix A mindestens zwei linear unabhängige Spalten besitzt, so ist sie invertierbar.	
(3)	Die Summe von zwei invertierbaren Matrizen gleichen Formats ist invertierbar.	
(4)	Das Produkt von zwei invertierbaren Matrizen gleichen Formats ist invertierbar.	
(5)	Die Spalten einer beliebigen Matrix A sind linear unabhängig, wenn sich höchstens eine davon als Linearkombination der übrigen schreiben läßt.	
(6)	Wenn eine Spalte einer Matrix A eine konvexe Linearkombination der übrigen ist, besitzt A keine Inverse.	