Universität–Gesamthochschule–Paderborn
Fachbereich 17 – Mathematik

Sommer 2002

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler A

Lösungen
zu den Abschnitten 6 bis 8

6.1

Lösung:
Gesucht sind Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *so daß für das Polynom 3. Grades*
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *gilt:*
$K(5) = 60$, $K(7) = 194$, $K(10) = 665$, $K(20) = 6525$.
Berechnet man die Werte der Kostenfunktion an den angegebenen Stellen, erhält man:
$125a + 25b + 5c + d = 60$
$343a + 49b + 7c + d = 194$
$1000a + 100b + 10c + d = 665$
$8000a + 400b + 20c + d = 6525$
Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$, $d = 5$. *Das gesuchte Polynom lautet also* $K(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 5$.

6.2

Lösung:
Man betrachte die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$; *hierbei ist E(x) die Erlösfunktion und K(x) die Gesamtkostenfunktion mit x=Anzahl der belegten Betten.*
Pro belegtem Bett werden 500 Schilling verdient. Die Erlösfunktion lautet also $E(x) = 500x$.
Aufgrund fehlender Informationen nimmt man an, daß die Kostenfunktion linear ist, also $K(x) = ax + b$. *Die Fixkosten b betragen laut Voraussetzung 32 000 Schilling, und die Gesamtkosten betragen 42 000 Schilling bei* $x = 100$. *Es gilt also* $42\,000 = K(100) = 100a + 32\,000$.
Es folgt $100a = 10\,000$ *und dann* $a = 100$.
Die Gewinnfunktion lautet damit $G(x) = 500x - (100x + 32000) = 400x - 32000$.
Die Nutzenschwelle liegt bei dem kleinsten x_0, *für das gilt* $G(x) > 0$, *für alle* $x > x_0$. *(Man mache sich dazu den Verlauf von* $G(x)$ *klar.)*
Wegen der Linearität von G reicht es, ein x_0 *zu finden, für das* $G(x_0) = 0$:
$400x_0 - 32000 = 0$. *Also* $x_0 = 80$. *D.h. ab einer Belegung von 80 Betten erzielt man Gewinn.*

6.3

Lösung:
a) Die Gesamtkostenfunktion wird als linear vorausgesetzt, also
$K(x) = ax + b$, *wobei x die Anzahl der produzierten Teile ist.*
Gesucht sind a und b.
Bei einer Stückzahl von 100 betragen die Gesamtkosten 3500 und bei einer Stückzahl von 300 betragen sie 7700. Man erhält die Gleichungen
$3500 = 100a + b$
$7700 = 300a + b$.
Diese führen auf $a = 21$ *und* $b = 1400$.
Die Gesamtkostenfunktion lautet also
$K(x) = 21x + 1400$ *(auch die weiteren Daten sind damit konsistent).*
b) Zubehörteile billiger zu produzieren heißt in diesem Fall, daß die Kosten pro Stück kleiner sind als 42,-DM. Die Stückkosten bei einer produzierten Menge von x Stück betragen $k(x) = \frac{K(x)}{x}$. *Gesucht ist also* x_0, *so daß* $\frac{21x+1400}{x} < 42$ *für alle* $x > x_0$. *Dies formt man nach x um* $(x > 0!)$ *und erhält* $x > \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$. *Weil nur ganzzahlige Produktionsangaben sinnvoll sind, ist ab einer produzierten Menge von 67 Teilen der Preis pro Stück kleiner als 42,-DM.*

6.4

Lösung:
a) $p \in [0, 100] \quad x \in [0, 12]$
b) $x = 0$ *für* $p = 100$ *c)* $x = 4$ *bei* $p = 40$
d) Beim Preis von $p_0 = \dfrac{900}{x_0 + 6} - 50$ *werden* x_0 *Einheiten nachgefragt.*

6.5

Lösung:
a) Für die Nachfrage x gilt $x(p) = \frac{a}{p} - b$ *(wegen* $a > 0$ *verschwindet p nicht).*
Beim Preis $p = \frac{a}{b}$ *ist die Nachfrage 0.*
Wenn $p_1 < p_2$, *dann ist* $x(p_1) > x(p_2)$. *Außerdem gibt es zu jeder Zahl* $x_0 > 0$ *ein* p_0, *so daß* $x(p_0) \geq x_0$: *wähle* $p_0 = \frac{a}{x_0+b}$. *D.h. die Nachfrage wird beliebig groß, wenn nur p klein genug wird.*
b)+c) $U = f(p) = p \cdot x(p) = a - bp$. *Wenn* $p_1 < p_2$, *dann ist* $a - bp_1 > a - bp_2$, *d.h. der Umsatz steigt, wenn der Preis fällt. Da* $p > 0$ *ist, kann* $U(p)$ *den Wert a nicht überschreiten.*

6.6 *Lösung:*
$x(p) = \frac{a}{p} - b$
Aus $\frac{a}{12} - b = 3000 - \frac{3000}{2} = 1500$ *und* $\frac{a}{9} - b = 3000 - \frac{3000}{6} = 2500$
folgt $a = 36\,000$ *und* $b = 1500$, *d.h.* $x(p) = \frac{36\,000}{p} - 1500$
α) *Wenn* $x(p) = 3000$, *dann ist* $p = 8$.
β) *Die Einkünfte werden durch die Erlösfunktion gegeben:* $E(p) = p \cdot x(p) = a - bp$, *d.h. der Erlös ist umso größer je kleiner der Preis ist. Andererseits ist bei* $p = 8$ *die Kapazitätsgrenze* $x = 3000$ *erreicht; also sind für* $p = 8$ *die Einkünfte maximal.*
γ) $E(8) = 24\,000$

6.7 *Lösung:*
Nachfragefunktion: $x_N(p) = \frac{75}{p} + 18$, *Angebotsfunktion:* $x_A(p) = 3p + 18$
Beim Gleichgewichtspreis stimmen Nachfrage und Angebot überein. Es muß also gelten:
$\frac{75}{p} + 18 = 3p + 18$.
Dies ist der Fall für $p = 5$ *(und für* $p = -5$, *was aber nicht ökonomisch sinnvoll ist). Die umgesetzte Menge ist* $x_N(5) = x_A(5) = 33$; *der Erlös ist*
$E(5) = 5 \cdot x_N(5) = 165$.

6.8 *Lösung:*
a) $D = [0, a/b]$ $p(D) = [0, \sqrt{a}]$ *b)* $x = \dfrac{-p^2 + a}{b}$ *c),d) Schulwissen*

6.9 *Lösung:*
Es werden 7840 Exemplare verkauft. Die Gewinnfunktion lautet
$G(p) = 7840p - 96\,000$, *wobei p der Verkaufspreis ist. Beim Preis von* $p = 16\frac{16}{49}$ *[DM je Stück] wird ein Gewinn von 32 000 DM erzielt.*

6.10 *Lösung:*
Die Kostenfunktion lautet $K(x) = 21\,000 + 18x$*[DM], wobei x die produzierte Stückzahl ist. Die Gewinnfunktion ist also* $G(x) = px - K(x) = (p - 18)x - 21\,000$*[DM]. Im Punkt* $x = 3000$ *beträgt der Gewinn* $3000p - 75\,000$, *dieser wird 0 für* $p = 25$. *Da die Gewinnfunktion für* $p = 25$ *monoton wächst, ist* $x = 3000$*[St] die Nutzenschwelle.*

6.11 *Lösung:*
Die Gewinnfunktion ist $G(x) = 10x - K(x) = 10x - \frac{x^2}{3} + 6x - 84 = -\frac{x^2}{3} + 16x - 84$. *Der Graph von G ist eine nach unten geöffnete quadratische Parabel mit den Nullstellen 6 und 42, d.h. G(x) ist auf dem Intervall* $(6, 42)$ *größer als 0. Da G hier aber nur auf [20,60] definiert ist, liegt die Nutzenschwelle bei* $x = 20$*[St].*

7.1

Lösung:

Die Durchschnittskosten sind durch die Funktion $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{\sqrt{ax+b}+c}{x}$ $(x > 0)$ *gegeben.*

Es gilt $k'(x) = \left(\frac{ax}{2\sqrt{ax+b}} - (\sqrt{ax+b}+c)\right)/x^2$

$= \frac{-ax-2b-2c\sqrt{ax+b}}{2x^2\sqrt{ax+b}} < 0$, *für* $x > 0$. *D.h. die Durchschnittskosten fallen mit zunehmender Ausbringung.*

Zweimaliges Ableiten der Kostenfunktion ergibt $K''(x) = \frac{-a}{4(ax+b)^{\frac{3}{2}}} < 0$, *für* $x > 0$. *D.h. auch die Grenzkosten fallen.*

7.2

Lösung:

a) $E(r) = \frac{1}{2}x(r) - 1 = \frac{\sqrt{5r}}{2} - 2$, $r > 0$.

b) $E'(r) = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{r}}$, $E'(5) = \frac{1}{4}$.

c) $E''(r) = \frac{-\sqrt{5}}{8r^{3/2}} < 0$ *für alle* $r > 0$, *also ist* E' *fallend.*

7.3

Lösung:

Die Gewinnfunktion lautet

$G(x) = p(x)x - K(x) = \frac{x^2+x}{(x+2)^2} - 0,01x^2 - 0,1x - 100$

a) $G'(x) = \frac{(2x+1)(x+2)^2 - (x^2+x)2(x+2)}{(x+2)^4} - 0,02x - 0,1$

$= \frac{3x+2}{(x+2)^3} - 0,02x - 0,1$

b) $G'(10) = \frac{32}{12^3} - 0,3 = -\frac{38}{135}$

7.4

Lösung:

Der Cournotsche Punkt ist der Schnittpunkt der Grenzerlösfunktion mit der Grenzkostenfunktion, es muß also gelten: $-6x + 18 = E'(x) = K'(x) = 2$. *Es folgt* $x = 8/3$.

7.5

Lösung:

Rauminhalt: $V = h(\frac{d}{2})^2\pi$, $h \in [0,90]$, $h + 2d \in [0,104]$

Da V *bei steigendem* d *oder* h *steigt, liegt das Maximum bei* $h + 2d = 104$, *also* $h = 104 - 2d$.

Für den Rauminhalt ergibt sich: $V(d) = \pi(26d^2 - \frac{d^3}{2})$. *Dieser ist nun in Abhängigkeit von* d *zu maximieren.*

$V'(d) = \pi(52d - \frac{3d^2}{2}) = 0 \Rightarrow d = 0$ *oder* $d = 104/3$.

Bei $d = 0$ *ist der Rauminhalt* $V = 0$, *es liegt also kein Maximum vor. Daraus folgt, daß an der Stelle* $d = 104/3$ *ein lokales Maximum vorliegt. Da das lokale Minimum der kubischen Funktion* V *an der Stelle 0 liegt, ist bei* $d = 104/3$ *auch das globale Maximum im vorgegebenen Intervall (Skizze).*

7.6

Lösung:

Der Ansatz $K'(v) = 1,5 - 0,02v = 0$ *ergibt* $v = 75$. *Wegen* $K''(v) = -0,02$ *ist* $v = 75$ *lokale Maximumstelle.*

Für $v \in [0,75)$ *ist* $K'(v) > 0$, *d.h.* $K(v)$ *wächst mit wachsendem v. Also muß bei* $v = 0$ *das Minimum sein.*

Bei v km/h fährt man v km in einer Stunde und hat Kosten von $K(v)$ *pro Stunde. Die Kosten für 1 km bei v km/h betragen also* $K(v)/v$.

Sei $H(v) := \frac{K(v)}{v} = \frac{0,1}{v} + 1,5 - 0,01v$

$H'(v) = -\frac{0,1}{v^2} - 0,01 < 0$ *für alle* $v \in [0,75]$, *d.h.* $H(v)$ *fällt mit wachsendem v. Also muß an der Stelle* $v = 75$ *das Minimum sein.*

8.1

Lösung:

a) $\frac{1}{2}x^2 + c$ b) $t^3 + c$ c) $\frac{1}{20}x^5 + c$

d) $\frac{1}{2}t + c$ e) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + c$ f) $-\frac{1}{2}$

g) $21\frac{3}{4}$ h) 0

8.2

Lösung:

	Schnittpunkte mit der x-Achse	Lösung (Vorzeichen beachten)
a)	$-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$
b)	0; 4	8
c)	-2; 3	$125/12$

8.3

Lösung:

Schnittpunkt: $E(x) = K(x) \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 6x + 16 = 0$ 1.Nullstelle: $x_1 = -1$, dann Polynom-division.

$(x^3 - 9x^2 + 6x + 16) : (x + 1) = x^2 - 10x + 16$

Weitere Nullstellen sind also: $x_2 = 2$ und $x_3 = 8$.

Im Intervall $[2, 8]$ ist $E(x) \geq K(x)$.

Gewinnlinse: $\int_2^8 E(x) - K(x)dx = \int_2^8 (-x^3 + 9x^2 - 6x - 16)dx$

$= -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 16x]_2^8 = 216$

8.4

Lösung:

$x \cdot p(x) = U(x) = 20x - 2x^2 + c \qquad \Rightarrow p(x) = 20 - 2x + \frac{c}{x}$

$\Rightarrow 30 = p(4) = 20 - 8 + \frac{c}{4} \qquad \Rightarrow c = 72$

8.5

Lösung:

$K(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$

8.6

Lösung:

Schnittpunkt: $2x + 2 = 18 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \Rightarrow x_1 = 4$ und $x_2 = -8$

Auf $[0, 4]$ ist die Nachfragefunktion größer als die Angebotsfunktion.

Konsumentenrente: $\int_0^4 \frac{1}{2}(36 - x^2) - 2(x + 1)dx = \int_0^4 16 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\,dx$

$= 16x - \frac{1}{6}x^3 - x^2]_0^4 = 37\frac{1}{3}$

8.7

Lösung:

$D_p = \mathbb{R}$, $W_p = (-\infty, 101]$ (Die Kurve von p ist eine nach unten geöffnete quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt $(-1, 101)$.)

$D_{oec} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{oec} = [0, 100]$, da $p(0) = 100$

a) $100 - 2x - x^2 = p_1 = 1 \qquad \Rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0 \Rightarrow x_1 = 9,\ x_2 = -11$

$\int_0^9 100 - 2x - x^2 - 1\,dx = \int_0^9 (99 - 2x - x^2)\,dx = 99x - x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^9 = 567$

b) $100 - 2x - x^2 = p_2 = 20 \qquad \Rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -10,\ x_2 = 8$

$\int_0^8 100 - 2x - x^2 - 20\,dx = \int_0^8 80 - 2x - x^2\,dx = 80x - x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^8 = 405\frac{1}{3}$

c) $100 - 2x - x^2 = p_3 = 52 \qquad \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = 6$

$\int_0^6 100 - 2x - x^2 - 52\,dx = \int_0^6 48 - 2x - x^2\,dx = 48x - x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^6 = 180$

8.8

Lösung:

$U = f(p) \qquad f'(p) = -15 \qquad p \cdot x(p) = f(p) = -15p + c$

$112 = 16 \cdot 7 = f(16) = -15 \cdot 16 + c = -240 + c \qquad \Rightarrow c = 352$

a)+b) $f(p) = -15p + 352$

$x(p) = \frac{f(p)}{p} = -15 + \frac{352}{p}$

$p(x) = \frac{352}{x+15}$

d) $x(p) = -15 + \frac{352}{p} = 0 \qquad \Rightarrow p = \frac{352}{15}$

e) $x'(p) = \frac{-352}{p^2}$

$x'(81) = \frac{-352}{6561} \approx -0,05$

g) $D_f = \mathbb{R}$, $D_{oec} = \mathbb{R}_0^+$

8.9

Lösung:

Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = x^3 - 2x^2 + 20x + 200$

$\frac{K(20)}{20} = 390$

8.10

Lösung:
$x(p) = a \int \frac{1}{\sqrt{p}} = 2a\sqrt{p} + c$
$0 = x(4) = 4a + c \qquad \Rightarrow c = -4a$
$200 = x(9) = 6a + c \qquad \Rightarrow c = 200 - 6a \qquad \Rightarrow a = 100 \qquad \Rightarrow c = -400$
$\Rightarrow x(p) = 200\sqrt{p} - 400$

8.11

Lösung:

a) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ b) $-2e^{-4x+3} + c$

c) $\frac{1}{4}\ln|1+4x| + c \quad (x \neq -\frac{1}{4})$ d) $-\frac{1}{8}\ln|1-4x^2| + c \quad (|x| \neq \frac{1}{2})$

e) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad (x > 0)$ f) $\frac{9}{2}x^4 + 24x^2 + c$

g) $\frac{1}{2}e^{2x^2} + c$ h) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 7| + c$

i) $\frac{1}{9}\ln|x^3 + 2| + c \quad (x \neq \sqrt[3]{-2})$ j) $\ln|\ln x| + c \quad (x > 0)$

k) $(ln(x^2) - 2)x + c \quad (x \neq 0)$ l) $\frac{1}{4}(\ln x - \frac{1}{4})x^4 + c \quad (x > 0)$

m) $(x-1)e^x + c$ n) $e^{-x}(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) + c$

o) $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + c \quad (x > 0)$

8.12

Lösung:

a) 28/3	b) 4,5	c) 1/6	d) 1
e) $\ln(e+1)$	f) $e - 1/e$	g) 5/72	h) $e - 1/e$
i) $1 - 1/a$	k) 0	l) $\ln 2 - \ln 3$	m) 1

8.13

Lösung:
Exakte Lösung: 20 für $n = 3$; 48,4 für $n = 4$

Trapezformel:

Intervalle	$n = 3$	$n = 4$
2	22	57
4	20,5	50,5625
8	20,125	48,94

Simpsonformel:

Intervalle	$n = 3$	$n = 4$
2	20	48,4167
4	20	48,401042
8	20	48,400065