Universität–Gesamthochschule–Paderborn WS 2001/2002
Fachbereich 17 – Mathematik

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler A

Lösungen
zu den Abschnitten 4 und 5

4.1

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -21$$

4.2

Lösung:
a) 24, b) 0.163, c) -146, d) 0, e) - 468

4.3

Lösung:
Berechnung der Determinante ergibt:
a) $8 - 5x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5}(8-a) \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}(8-a)}; a \leq 8$
b) $0 = 12 - x \Leftrightarrow x = 12$
c) $-30x + 150 = 0 \Rightarrow x = 5$
d) $x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$

4.4

Lösung:

a) *Vorzeichenbehaftete Fläche A eines Dreiecks mit den Eckpunkten*
$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$
$P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} det(P_2 - P_1, P_3 - P_1) \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1, x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1, y_3 - x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(Hinweis: Der Flächeninhalt ist $|A|$!)

b) *Vorzeichenbehaftetes Volumen eines von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannten Parallelepipeds*

$$V = det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = det\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 80$$

4.5

Lösung:
det $(P_2 - P_1, P_3 - P_1)$ ist definitionsgemäß der orientierte Flächeninhalt des durch $P_2 - P_1$ und $P_3 - P_1$ aufgespannten Parallelogrammes. Den Flächeninhalt des Dreiecks erhält man als die Hälfte des Betrages hiervon.

4.6 *Lösung:*

Sei $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \\ \overline{y}_1 & \overline{y}_2 \end{pmatrix},$

dann ist $|A| = x_1y_2 - x_2y_1, \quad |B| = \overline{x}_1\overline{y}_2 - \overline{x}_2\overline{y}_1$ *und*

$AB = \begin{pmatrix} x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{y}_1, & x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{y}_2 \\ y_1\overline{x}_1 + y_2\overline{y}_1, & y_1\overline{x}_2 + y_2\overline{y}_2 \end{pmatrix}$

sowie $|AB| = x_1\overline{x}_1y_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_1y_2\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1y_1\overline{x}_2 + x_2\overline{y}_1y_2\overline{y}_2 - y_1\overline{x}_1x_1\overline{x}_2 -$
$- y_1\overline{x}_1x_2\overline{y}_2 - y_2\overline{y}_1x_1\overline{x}_2 - y_2\overline{y}_1x_2\overline{y}_2$

und $|A| \cdot |B| = x_1y_2\overline{x}_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1\overline{x}_2\overline{y}_1 - x_1y_2\overline{x}_2\overline{y}_1 - x_2y_1\overline{x}_1\overline{y}_2,$
damit $|AB| = |A||B|$

4.7 *Lösung:*
a) $det(\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3) = 56 \cdot det(\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3) = 280$
b) $\det(\underline{b}^2 - \underline{b}^1, \underline{b}^3, \underline{b}^1 + \underline{b}^3) = det(\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3) = 5$

4.8 *Lösung:*
(*)-Aufgabe

4.9 *Lösung:*

Für $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *gilt die Gleichung;*

für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *gilt sie nicht.*

4.10 *Lösung:*

a) $0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 7.$ *Daraus folgt:*
$\lambda_1 = 1$ *und* $\lambda_2 = 7$ *sind die Eigenwerte von* A.

b) $0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$. *Daraus folgt* $\lambda_1 = 1$
und $\lambda_2 = -1$ *sind die Eigenwerte von* A.

4.11 *Lösung:*
Variante I: Ausnutzen der Multilinearität.
Für $A = (\underline{a}^1, \underline{a}^2)$, $B = (\underline{b}^1, \underline{b}^2)$ *[in Spaltennotation] gilt*
$\det(A+B) = \det(\underline{a}^1 + \underline{b}^1, \underline{a}^2 + \underline{b}^2) = \det(\underline{a}^1, \underline{a}^2 + \underline{b}^2) + \det(\underline{b}^1, \underline{a}^2 + \underline{b}^2)$
$= \det(\underline{a}^1, \underline{a}^2) + \det(\underline{a}^1, \underline{b}^2) + \det(\underline{b}^1, \underline{a}^2) + \det(\underline{b}^1, \underline{b}^2) = a + b + c + d$

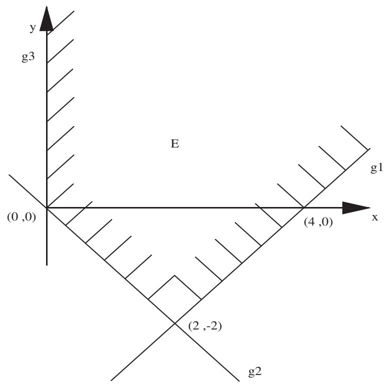
Variante II: Elementares Nachrechnen:
$\det(A+B) = (a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21}) = a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} -$
$a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} = a + b + c + d$

Lösung:

a) *Die Ungleichungen:*

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad x - y \leq 4 \\ g_2 &: \quad x + y \geq 0 \\ g_3 &: \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

charakterisieren die folgende Erfüllungsmenge E. E ist konvex und unbeschränkt.

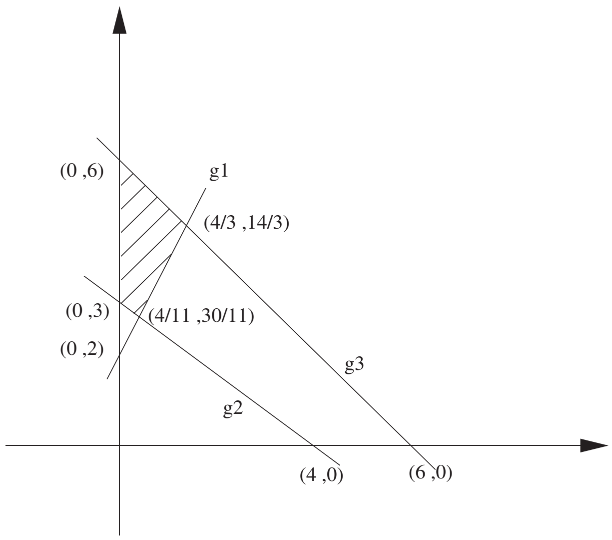


b) *Die Ungleichungen :*

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad -2x + y \geq 2 \\ g_2 &: \quad 3x + 4y \geq 12 \\ g_3 &: \quad x + y - 6 \leq 0 \\ g_4 &: \quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

5.1

charakterisieren die folgende Erfüllungsmenge E. E ist konvex und beschränkt.

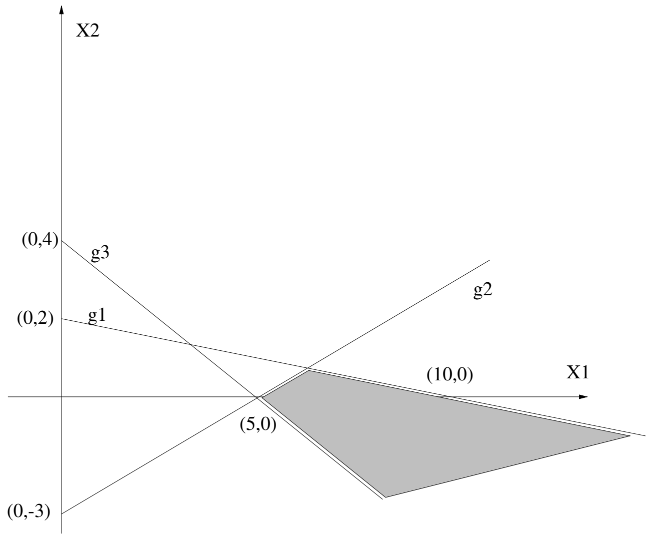


c) *Die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad x + 5y \leq 10 \\ g_2 &: \quad 3x - 5y \geq 15 \\ g_3 &: \quad 4x + 5y \geq 20 \end{aligned}$$

charakterisieren die folgende Erfüllungsmenge E. E ist konvex und unbeschränkt.

Lösung:



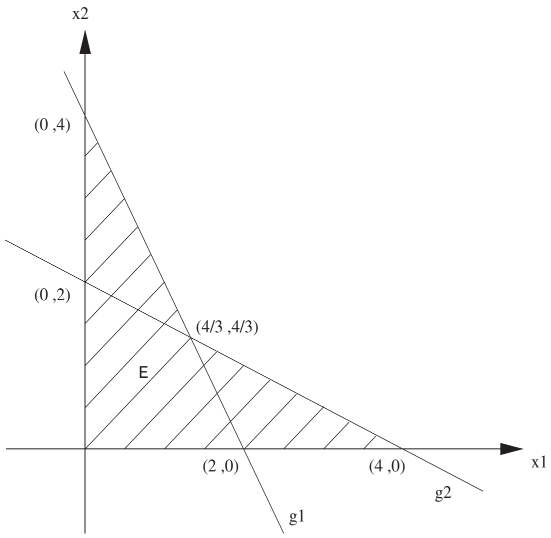
d) *Die Ungleichungen:*

$$g_1 : 2x + y \leq 4 \quad und \quad x, y \geq 0$$

oder

$$g_2 : x + 2y \leq 4 \quad und \quad x, y \geq 0$$

charakterisieren die folgende Erfüllungsmenge E. E ist <u>nicht</u> konvex, aber beschränkt.



Lösung:
Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} g_1 &: 4x - 7y + 28 = 0 \\ g_2 &: 2x + 6y - 9 = 0 \\ g_3 &: -x - 2y + 5 = 0 \end{aligned}$$

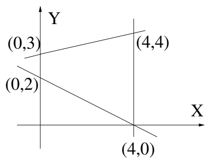
5.2 *Die Flächen (1), (3), (5) und (7) werden von allen drei Geraden berandet (man beachte den Schnittpunkt der Geraden g_2 und g_3!). Für die einzelnen Flächen gelten die folgenden Ungleichungssysteme :*

$$\begin{array}{lllll} (1)\ g_1 & : & 4x - 7y + 28 & \geq & 0 \\ \quad g_2 & : & 2x + 6y - 9 & \geq & 0 \\ \quad g_3 & : & -x - 2y + 5 & \leq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} (3)\ g_1 & : & 4x - 7y + 28 & \geq & 0 \\ \quad g_2 & : & 2x + 6y - 9 & \leq & 0 \\ \quad g_3 & : & -x - 2y + 5 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} (5)\ g_1 & : & 4x - 7y + 28 & \leq & 0 \\ \quad g_2 & : & 2x + 6y - 9 & \geq & 0 \\ \quad g_3 & : & -x - 2y + 5 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} (7)\ g_1 & : & 4x - 7y + 28 & \geq & 0 \\ \quad g_2 & : & 2x + 6y - 9 & \geq & 0 \\ \quad g_3 & : & -x - 2y + 5 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösung:
Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_i \geq 0, \sum s_i = 1$ *folgt, daß die so beschriebene Menge die Eckpunkte (0 ,2), (0 ,4), (4 ,4) und (4 ,0) hat. Anhand einer Skizze:*

5.3



ersieht man nun die genaue Form der Menge E *und kann die geforderten Ungleichungen ablesen:*

$$g_1 : y \leq \frac{1}{4}x + 3; g_2 : 0 \leq x \leq 4; g_3 : y \geq -\frac{1}{2}x + 2.$$

Lösung:
b_i *bezeichne die abzusetzende Menge der Betonsorte* B_i *[in Tonnen].*
a) Die Menge zulässiger Absatzpläne ist dann
$B = \left\{ \underline{b} \in I\!R^3 | 20b_1 + 25b_2 + 10b_3 = 100\,000, \quad \underline{b} \geq 0 \right\}$
(geometrisch: Der im ersten Oktanden verlaufende Teil einer Ebene)

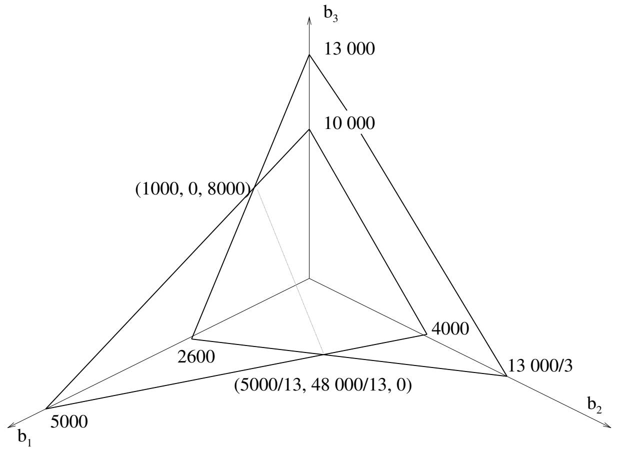
b1) Folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$20b_1 + 25b_2 + 10b_3 = 100\,000$
$0,5b_1 + 0,3b_2 + 0,1b_3 = 1\,300$

Die Menge L der sinnvollen (d.h. nichtnegativen) Lösungen ist

$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} 13\lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \end{pmatrix} -5000, \quad \frac{5000}{13} \leq \lambda \leq 1000 \right\}$
(geometrisch: eine Strecke in der o.g. Teilebene)

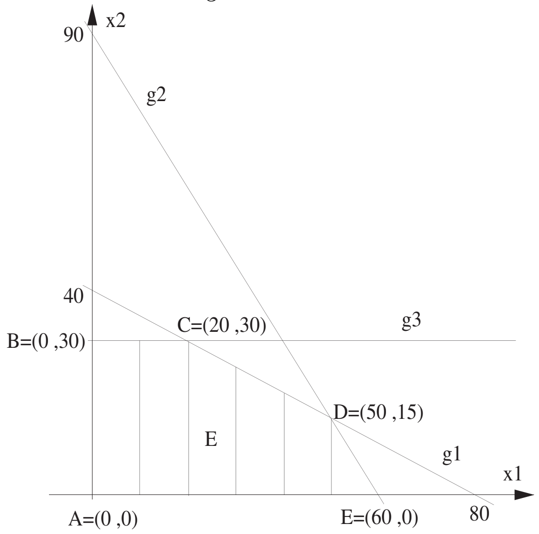
b2) Hier ist das LUS
$20b_1 + 25b_2 + 10b_3 = 100\,000$
5.4 $0,5b_1 + 0,3b_2 + 0,1b_3 \leq 1\,300$
zu betrachten.
Es ist lösbar, weil bereits das entsprechende GLS (in b1)) lösbar ist.
Geometrisch ergibt sich als Lösungsmenge ein Ausschnitt aus der unter a) genannten Teilebene.



Lösung:
Sei zur Abkürzung x_i die Anzahl der Einheiten, die vom Erzeugnis i produziert wird. Somit müssen allgemein die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} g_1 &: 3x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ g_2 &: 6x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ g_3 &: 5x_2 \leq 150 \\ g_4 &: x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Zeichnerische Lösung :
Die Erfüllungsmenge E stellt sich wie folgt dar:



Das heißt, die Erfüllungsmenge E ist konvexe Kombination ihrer Eckpunkte: $E = conv(A, B, C, D, E)$.

5.5 *Offensichtlich gilt nun:*
(1) Genau die Produktionpläne aus der Menge E, die nicht auf einer der Geraden g_1 bis g_3 liegen, zum Beispiel $x = (1, 1)$, verbrauchen keines der Materialien vollständig.
(2) Zulässige Produktionspläne, die das Material (1, 2 oder 3) aufbrauchen, nicht aber die anderen Materialien, müssen auf $(g_1, g_2$ oder $g_3)$ liegen, ohne auf einer der beiden anderen Geraden zu liegen.
Somit ergibt sich :
a) conv(C,D)$\setminus${C,D} : Menge der zulässigen Produktionspläne, die Material 1 aufbrauchen.
conv(D,E)$\setminus${D} : Menge der zulässigen Produktionspläne, die Material 2 aufbrauchen.
conv(B,C)$\setminus${C} : Menge der zulässigen Produktionspläne, die Material 3 aufbrauchen.
In C=(20 ,30) werden die Materialien 1 und 3 vollständig aufgebraucht.
In D=(50 ,15) werden die Materialien 1 und 2 vollständig aufgebraucht.
Es existiert kein zulässiger Produktionsplan, in dem die Materialien 2 und 3 vollständig aufgebraucht werden.
b) Ein Produktionsplan, bei dem alle drei Materialien aufgebraucht werden kann nur existieren, falls sich alle drei Restiktionsgeraden in einem Punkt schneiden. Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, indem man:
- *Material 3 auf 75 herabsetzt, oder*
- *Material 2 auf 240 herabsetzt, oder*
- *Material 1 auf 300 heraufsetzt.*

Lösung mit dem Simplexverfahren :
Das Ungleichungssystem kann als zulässiger Bereich eines Standardmaximumproblems mit der Zielfunktion $Z(x, y) = 0$ angesehen werden. Ein erstes Simplextableau ergibt sich zu :

	x_1	x_2	1
s_1	-3	-6	240
s_2	-6	-4	360
s_3	0	-5	150
Z	0	0	0

Dieses Tableau ist optimal. Da aber jede weitere Ecke (B, C, D, E) des zulässigen Bereiches ebenfalls optimal ist (denn die Zielfunktion ist konstant), kann durch insgesamt vier Simplex-Austauschschritte jede dieser Ecken erreicht werden. Hierbei ist darauf zu achten, Wiederholungen zu vermeiden. Man erhält dann dasselbe Ergebnis wie bei der zeichnerischen Lösung.

Lösung:

zu c) Es bezeichne x die Anzahl der mit Erbsen bebauten Morgen und y die Anzahl der mit Stangenbohnen bebauten Morgen.

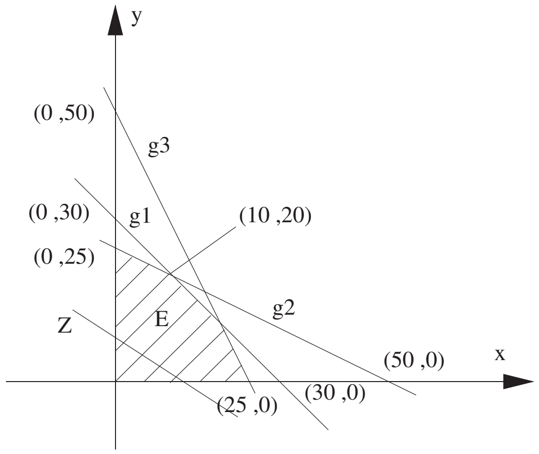
Es ergeben sich nun folgende Einschränkungen:

g_1 :	$x+y$	$\leq$	30	*Beschränkung des Anbaulandes (in Morgen)*
g_2 :	$x+2y$	$\leq$	50	*Beschränkung der Arbeitstage (in Tagen)*
g_3 :	$200x+100y$	$\leq$	5000	*Beschränkung des Kapitals (in DM)*

Zielsetzung ist es, den Gewinn zu maximieren, also $Z(x,y) = 200x + 300y \rightarrow max$ zu lösen.

Aus der graphischen Lösung der Aufgabe:

5.6



erhält man ein Maximum bei $x = 10$ und $y = 20$. Der Wert der Zielfunktion ist dort $Z_{max} = 8000$.

Der Gemüsebauer erhält also einen Gewinn von 8000 DM, wenn er 10 Morgen Erbsen und 20 Morgen Stangenbohnen anbaut.

zu a) Es können maximal 25 Morgen Erbsen bzw. Bohnen angebaut werden.

zu b) Es existiert keine Lösung.

Lösung:

Der Gehalt der einzelnen Präparate sei u und v. Als Restriktionen für die einzelnen Vitamine erhält man:

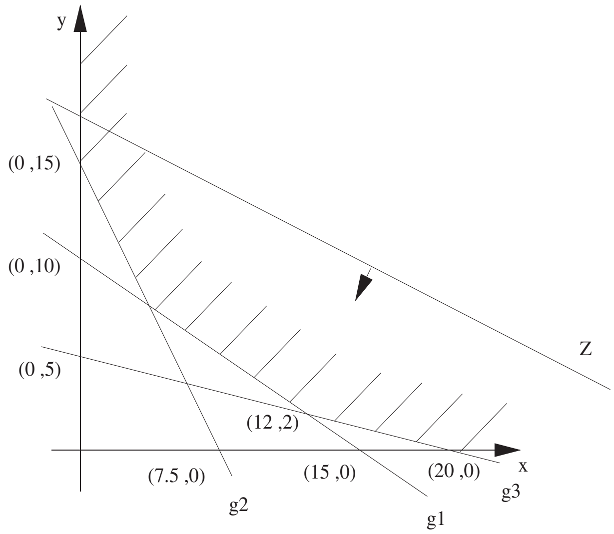
g_1 :	$0.1u + 0.15v$	$\geq$	1.5	*Bedarf an Vitamin A*
g_2 :	$20.0u + 10.0v$	$\geq$	150.0	*Bedarf an Vitamin C*
g_3 :	$1.0u + 4.0v$	$\geq$	20.0	*Bedarf an Vitamin K*

(Alles gemessen in Mengeneinheiten)

Ziel ist es, die Kosten zu minimieren, also $Z(u,v) = 0.1u + 0.2v \rightarrow min$ (in DM) zu lösen.

Die Aufgabe ist graphisch lösbar, man erhält (mit (x,y) statt (u,v)):

5.7

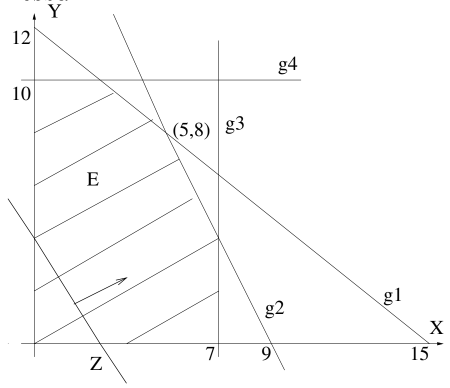


Es ergibt sich ein Minimum bei $u = 12$ und $v = 2$. Der minimale Wert der Zielfunktion ist dann $Z_{min} = 1.6$. Führt man also jedem Besatzungsmitglied 12g des Präparates U und 2g des Präparates V zu, so ist der Vitaminbedarf bei einem minimalen Kostenaufwand von 1.6 DM gedeckt.

Lösung:
Sei zur Abkürzung x_i die Anzahl der Stücke, die vom Gut i produziert wird. Als Restriktionen ergeben sich :
- die Beschränkungen für die Maschinen
$g_1 : \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{12} \leq 1$
und $g_2 : \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{18} \leq 1$,
- die Beschränkungen für die Fließbänder $g_3 : x_1 \leq 7$ *und* $g_4 : x_2 \leq 10$,
- die Nichtegativitätsbedingungen.
Die Zielfunktion zur Ermittelung des größtmöglichen Gewinnes lautet
$Z(x_1, x_2) = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow max$.

Das Problem ist graphisch lösbar:

5.8



Man erhält das Maximum für $(x_1, x_2) = (5, 8)$. *Der Wert der Zielfunktion ist hier* $Z_{max} = 80$.

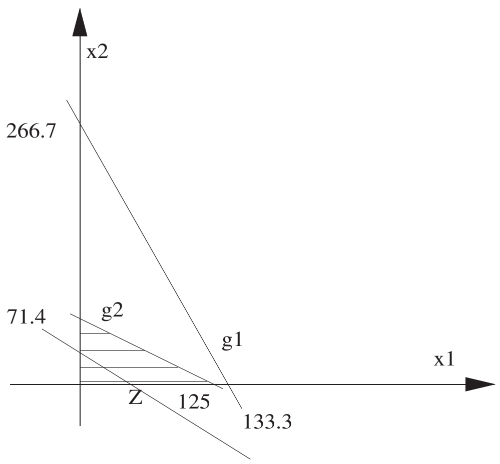
Lösung:
Aus den Daten kann man die folgende Tabelle erstellen:

Farbe	*Mischung 1*	*Mischung 2*	*Fonds*
A	*0.6*	*0.3*	*80*
B	*0.4*	*0.7*	*50*

Sei zur Abkürzung x_i die Menge an hergestellter Mischung i. Es gelten also die folgenden Ungleichungen:

$g_1 :\quad 0.6x_1 + 0.3x_2 \quad \leq \quad 80.0$ *Höchstmenge an Farbe A, in kg*
$g_2 :\quad 0.4x_1 + 0.7x_2 \quad \leq \quad 50.0$ *Höchstmenge an Farbe B, in kg*
und die Nichtnegativitätsbedingungen.
Die Zielfunktion, die den Verkaufserlös maximiert, lautet $Z(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 - 2 \rightarrow max$ *(in DM). Durch die graphische Lösung der Aufgabe:*

5.9



erhält man ein Maximum für $x_1 = 125$ *und* $x_2 = 0$. *Der Wert der Zielfunktion ist dann* $Z_{max} = 1250$. *Stellt man also 125 kg der Mischung 1 her, so erhält man den maximalen Gewinn von 1250DM.*

Lösung:

(1) Mathematische Formulierung des Problems:

Sei zur Abkürzung x_{ij} die Anzahl der Großbausteine, die von Lager j zu Baustelle i transportiert werden sollen und k_{ij} die dabei anfallenden Transportkosten. Ziel ist es, die Transportkosten zu minimieren, also das Programm $K(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}k_{ij} \to min$ zu lösen. Da der Gesamtbestand aller Lager mit dem Gesamtbedarf aller Baustellen (4000 Steine) übereinstimmt, wird der Bedarf der Baustellen befriedigt:

$$\begin{array}{llllll} B_1 : & x_{11} + x_{12} & & & = & 1200 \\ B_2 : & & x_{21} + x_{22} & & = & 2000 \\ B_3 : & & & x_{31} + x_{32} & = & 800 \end{array}$$

und die Lagerbestände werden ausgeschöpft:

$$\begin{array}{lllllllll} L_1 : & x_{11} & & +x_{21} & & +x_{31} & & = & 2400 \\ L_2 : & & x_{12} & & +x_{22} & & +x_{32} & = & 1600 \end{array}$$

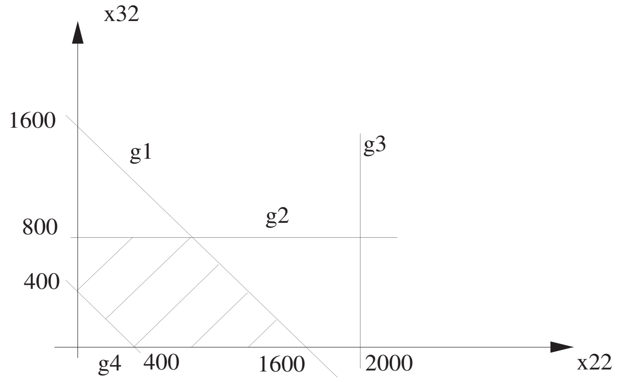
wobei alle auftretenden Größen nichtnegativ sein müssen.

Man kann folgende Gleichungen herleiten:

$$\begin{array}{rcll} x_{12} = & 1600 - x_{22} - x_{32} & \geq & 0 \\ x_{31} = & 800 - x_{32} & \geq & 0 \\ x_{21} = & 2000 - x_{22} & \geq & 0 \\ x_{11} = & -400 + x_{22} + x_{32} & \geq & 0 \end{array}$$

5.10

Diese Ungleichungen bilden die Erfüllungsmenge des Optimierungsproblems, das man graphisch lösen kann:



Als optimale Lösung erhalten wir dann $y^T = (1200, 400, 800, 0, 1600, 0)$.

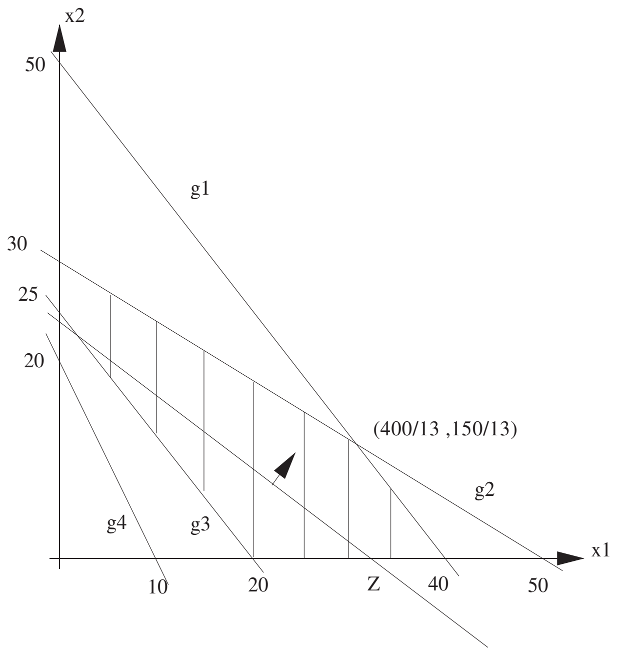
Der Wert der Zielfunktion ist ablesbar zu $Z = -684$, d.h. also der kleinste Kostenaufwand des Transportproblems beträgt 684 DM.

5.11

Lösung:
Es sei zur Abkürzung x_1 die Anzahl der nach Prozeß I produzierten Stunden und x_2 die Anzahl der nach Prozeß II produzierten Stunden.
a) Es müssen die folgenden, aus der Tabelle ersichtlichen Ungleichungen gelten:

$$
\begin{array}{llll}
g_1: & 5x_1 + 4x_2 & \leq & 200 \quad \textit{Beschränkung von } A \\
g_2: & 3x_1 + 5x_2 & \leq & 150 \quad \textit{Beschränkung von } B \\
g_3: & 5x_1 + 4x_2 & \geq & 100 \quad \textit{Mindestproduktion an } X \\
g_4: & 8x_1 + 4x_2 & \geq & 80 \quad \textit{Mindestproduktion an } Y
\end{array}
$$

Als Zielfunktion ergibt sich $Z(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 \to max$ (in DM). Die graphische Lösung des Sachverhaltes:



ergibt ein Maximum bei $x_1 = 400/13 \approx 30,77$ und $x_2 = 150/13 \approx 11,54$. Der Wert der Zielfunktion ist dann $Z = 18\,000/13 \approx 1384,6$. Produziert man also 30,77 Stunden nach Prozeß I und 11,54 Stunden nach Prozeß II, so erhält man den maximalen Gewinn von 1384,6 DM.
b) Setzt man die Mindestproduktion von Y auf 320 Einheiten herauf, so verändert sich die vierte Ungleichung entsprechend und die Lösung ist $(40; 0)$.

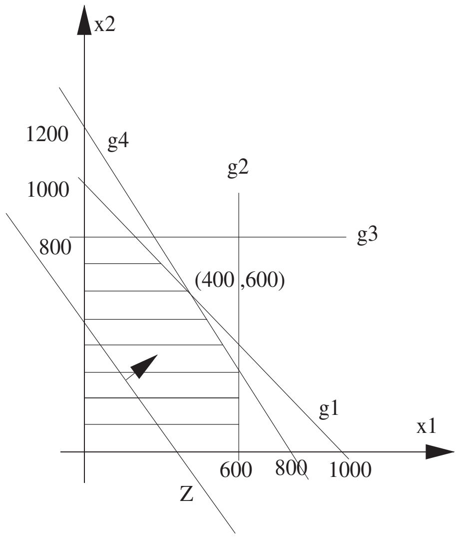
Lösung:
Es sei zur Abkürzung x_1 die Anzahl der produzierten Gefriertruhen und x_2 die Anzahl der produzierten Kühlschränke. Es müssen die folgenden Ungleichungen gelten:

g_1 :	$x_1 + x_2$	$\leq$	1000	*Gehäuseabteilung, Anzahl der Gehäuse*
g_2 :	x_1	$\leq$	600	*Montageabteilung für Gefriertruhen*
g_3 :	x_2	$\leq$	800	*Montageabteilung für Kühlschränke*
g_4 :	$\frac{3}{2}x_1 + x_2$	$\leq$	1200	*Abteilung für elektrische Installation*

Die Zielfunktion lautet: $Z(x_1, x_2) = 360x_1 + 280x_2 \to max$ *(in DM).*

Das Problem ist graphisch lösbar:

5.12



Als gesuchte Lösung findet sich ein Maximum für $x_1 = 400$ *und* $x_2 = 600$. *Der maximale Gewinn ist dann* $Z_{max} = 312000$. *Stellt man also 400 Gefriertruhen und 600 Kühlschränke her, so beträgt der Gewinn 312000 DM.*

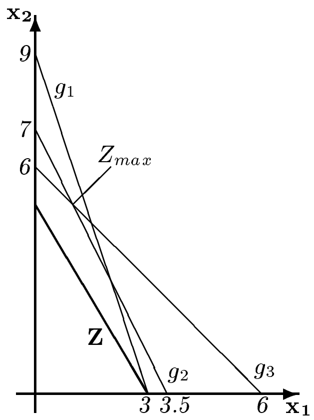
5.13 *Lösung:*

Lösung:
Mit den Bezeichnungen $x_i :=$ *zu produzierende Menge des Erzeugnisses* E_i *ergibt sich als Zielfunktion :*

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \to max.$$

Aus der Tabelle und den Nichtnegativitätsbedingungen $x_i \geq 0$ *ergibt sich das mathematische Modell :*
Skizze :

5.14



$$\begin{aligned} g_1 : \quad & 9x_1 + 3x_2 && \leq 27 \\ g_2 : \quad & 2x_1 + x_2 && \leq 7 \\ g_3 : \quad & 2x_1 + 2x_2 && \leq 12 \\ & x_i && \geq 0 \end{aligned}$$

Die graphische Lösung liefert das Ergebnis $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ *und* $Z_{max} = 20$. *Produziert die Fabrik also eine Mengeneinheit des Erzeugnisses* E_1 *und fünf Mengeneinheiten de Erzeugnisses* E_2, *so hat sie den maximalen Gewinn von 20000 DM.*