Universität–Gesamthochschule–Paderborn WS 2001/2002
Fachbereich 17 – Mathematik

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler A

Lösungen
zu den Abschnitten 1 bis 3

1.1 *Lösung:*
Folgende Formate sind möglich. $1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, 6 \times 6$ *und die dazu transponierten Formate.*

1.2 *Lösung:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

1.3 *Lösung:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1.4 *Lösung:*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 10 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -10 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ c) *wie b)*

d) $\begin{pmatrix} 55 & -64 \\ -53 & 3 \\ 4 & -30 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -31/2 & 67/2 \\ 25 & 21/2 \\ 7/2 & 19/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

1.5 *Lösung:*
Es gilt $B > C$; A *und* B *sowie* A *und* C *sind unvergleichbar.*

1.6 *Lösung:*
$2 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 4.$

1.7 *Lösung:*

a) $L_0 \geq 5A + 3B$

b) *Die Bedingung a) ist mit den gegebenen Matrizen* L_0, A *und* B *erfüllt.*

c) a_{23} *darf nicht anwachsen.*

d) *Die Lagerrestbestände sind durch*

$$R = L_0 - 5A - 3B = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 20 \\ 80 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{pmatrix} \quad \textit{gegeben.}$$

1.8 *Lösung:*
Das Produkt BA *ist definiert, nicht dagegen* AB*; dabei gilt*

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 17 & 14 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 14 & -2 \\ 19 & -4 & -23 & 16 & -38 \end{pmatrix}.$$

1.9

Lösung:
Nicht sinnvoll sind die Ausdrücke
b) CA, *c)* AB, *f)* $(A-D)C$, *und h)* $D(A-B)$
Sinnvoll dagegen:

a) $AC = \begin{pmatrix} 11 & 24 & 16 & 28 \\ 13 & 22 & 17 & 28 \\ 22 & 18 & 23 & 32 \end{pmatrix}$ d) $BD = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 3 & 2 \\ 29 & 0 & 5 & 4 \\ 23 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

e) $(A+B)C = \begin{pmatrix} 21 & 34 & 27 & 44 \\ 30 & 40 & 36 & 56 \\ 35 & 40 & 40 & 60 \end{pmatrix}$ g) $(A+B)D = \begin{pmatrix} 37 & 0 & 5 & 12 \\ 52 & 0 & 8 & 12 \\ 60 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

i) $(A+B)(C-D) = \begin{pmatrix} -16 & 34 & 22 & 32 \\ -22 & 40 & 28 & 44 \\ -25 & 40 & 30 & 50 \end{pmatrix}$

1.10

Lösung:
Es gilt

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -3 & 29 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -23 \end{pmatrix}$$

und somit

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 & -19 \\ -11 & -10 \end{pmatrix} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Die binomische Formel "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$*" ist somit für Matrizen nicht allgemeingültig. Wegen* $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ *gilt sie genau dann, wenn* $AB = BA$ *gilt.*

1.11

Lösung:
(Vorbemerkung: Multipliziert man eine $l \times m$*-Matrix* X *mit einer* $m \times n$*-Matrix* Y*, werden* $l \times m \times n$ *Multiplikationen und* $l(m-1)n$ *Additionen benötigt. Es genügt jedoch wegen des viel größeren Aufwandes, nur Multiplikationen zu betrachten.)*

1. Fall:	Bildung von	AB	$3 \times 2 \times 4 = 24$	Multiplikationen
	und Bildung von	$(AB)C$	$3 \times 4 \times 3 = 36$	Multiplikationen
			60	Multiplikationen
2. Fall:	Bildung von	BC	$2 \times 4 \times 3 = 24$	Multiplikationen
	und Bildung von	$A(BC)$	$3 \times 2 \times 3 = 18$	Multiplikationen
			42	Multiplikationen

Man bevorzugt die Reihenfolge $A(BC)$.

Ergebnis: $BC = \begin{pmatrix} 34 & 41 & 19 \\ 35 & 14 & 7 \end{pmatrix}$ $A(BC) = \begin{pmatrix} 243 & 152 & 73 \\ 242 & 179 & 85 \\ 273 & 301 & 140 \end{pmatrix}$

1.12

Lösung:
—

1.13

Lösung:

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\underline{f} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 1500 \\ 1900 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b. *Für eine vorgegebene Produktionsmenge* $\underline{x}$ *errechnet sich die verbrauchte Maschinenzeit durch* $A \cdot \underline{x}$.

c. *Der Vektor* $\underline{x}$ *muß so gewählt werden, daß gilt:* $\underline{x} \geq 0$ *und* $A \cdot \underline{x} \leq \underline{f}$.

Lösung:
Es gilt allgemein:
$\underline{r} = V^{0,1} \cdot \underline{z}$ *und* $\underline{z} = V^{1,2} \cdot \underline{p}$
(solange genau soviele Rohstoffe bzw. Zwischenprodukte benötigt werden, wie in die Zwischenprodukte bzw. Endprodukte eingehen), also:

1.14 $\underline{r} = V^{0,1}V^{1,2} \cdot \underline{p}$

a) $V^{0,1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad V^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{z} = V^{1,2} \cdot \underline{p} = \begin{pmatrix} 56 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad \underline{r} = V^{0,1} \cdot \underline{z} = \begin{pmatrix} 308 \\ 462 \end{pmatrix}$

Lösung:
Es werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

A: spezifischer Rohstoffverbrauch
$\underline{x}$*: Produktionsprogramm*
$\underline{p}$*: Vektor der Rohstoffpreise*
$\underline{k}$*: Vektor der Rohstoffkosten je Erzeugniseinheit*
K: Gesamtkosten

In der Matrix A gibt das Element a_{ij} *an, wie hoch der Verbrauch von Rohstoff i für die Produktion einer Einheit des Erzeugnisses j ist.*

1.15 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 15 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Das Element x_j *des Vektors* $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ *gibt an, wieviel vom Erzeugnis j (in* ME_j*)hergestellt werden soll. Dann ist der Vektor des Rohstoffverbrauchs* $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ *gegeben durch* $\underline{r} = A \cdot \underline{x}$.

a) $A \cdot \underline{x} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix} =: \underline{r^1}$ *b)* $A \cdot \underline{x} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix} =: \underline{r^2}$

c) Es gilt: $\underline{p} = \begin{pmatrix} 102 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix}$

für Fall a) folgt: $K = \underline{p}^T \underline{r^1} = 2494$
für Fall b) folgt: $K = \underline{p}^T \underline{r^2} = 3527$
d) Es gilt: $\underline{k^T} = \underline{p}^T A$, *also* $k_1 = 661$, $k_2 = 561$, $k_3 = 411$ *und* $k_4 = 861$.

Lösung:
Das Produkt $D := ABC$ *kann gebildet werden; es gilt*

1.16 $$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, p.$$

Lösung:

a) $AXA^{-1} = I \Rightarrow X = A^{-1}IA = A^{-1}A = I \Rightarrow X = I$

b) $(A - X)B = I \Rightarrow A - X = B^{-1} \Rightarrow X = A - B^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$

c) $(2B + XB) = AXB \Rightarrow 2B = AXB - XB = (A - I)XB \Rightarrow X = (A - I)^{-1}2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $AB - BX = 2(A - B)X - AX$
$\Rightarrow AB - BX = (A - 2B)X \Rightarrow AB = (A - B)X$
$\Rightarrow X = (A - B)^{-1}AB = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -33 & 6 \\ -9 & -22 \end{pmatrix}$

e) $A + (A^{-1}XB)^{-1} = 2A$
$\Rightarrow A^{-1}XB = A^{-1}$
$\Rightarrow XB = I$
$\Rightarrow X = B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

1.17 f) $(A - B) + A^{-1}X = I$
$\Rightarrow X = A(I + B - A) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}$

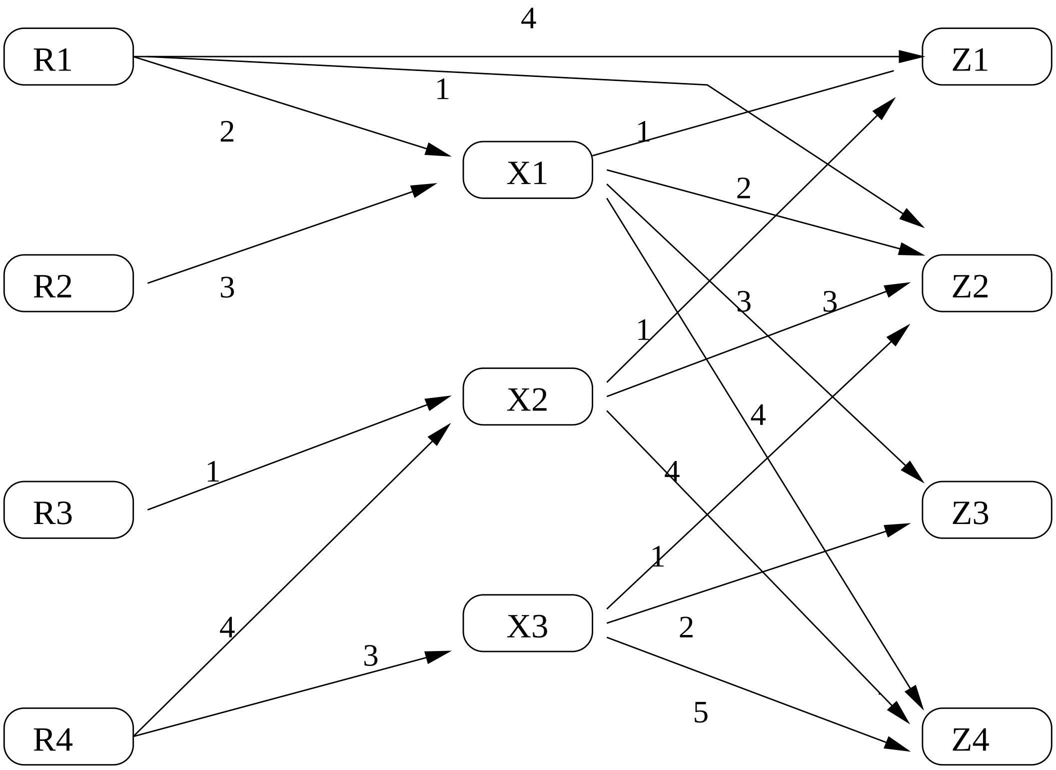
g) $2X - (A + B)^2X = I - CX$
$\Rightarrow (2I - (A + B)^2 + C)X = I$
$\Rightarrow X = (2I - (A + B)^2 + C)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

h) $A(X - 2I) = A(3I - X)B + AX + B$
$\Rightarrow AXB = 3AB + 2A + B$
$\Rightarrow X = A^{-1}(3AB + 2A + B)B^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 77 & 9 \\ 21 & \frac{229}{3} \end{pmatrix}$

i) $(2) \Rightarrow X + Y = \frac{1}{2}BA^{-1}$
$\Rightarrow Y = \frac{1}{2}BA^{-1} - X$
in (1): $X(I + B) + \dfrac{1}{2}BA^{-1}B - XB = -I$
$\Rightarrow X = -I - \dfrac{1}{2}BA^{-1}B = 1/2\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}$ *und*
$Y = \frac{1}{2}BA^{-1} + I + \frac{1}{2}BA^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) <u>*Gozintograph*</u>*:*



1.18

b) $V^{0,1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; V^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$V^{0,2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) *Rohstoffverbrauch pro Einheit der Fertigprodukte:*

$$G^{0,2} = V^{0,1}V^{1,2} + V^{0,2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 15 & 6 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 15 & 6 & 31 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Mit $\underline{x}^T := (100, 200, 400)$ *und*

$$\underline{z}^T := (200, 100, 100, 100)$$

ergibt sich der gesuchte Rohstoffbedarfsvektor

1.19

$$\underline{r}^T := (r_1, r_2, r_3, r_4)$$

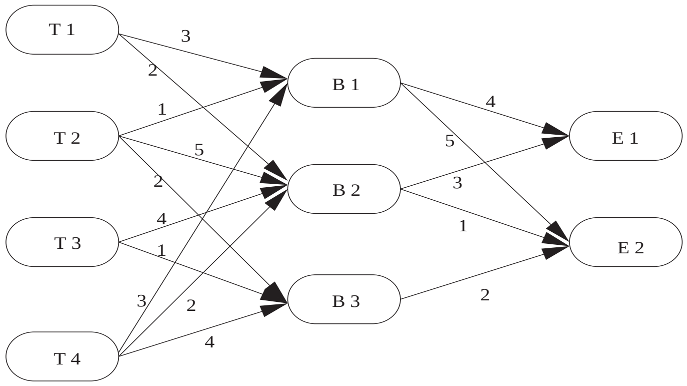
aus

$$\underline{r} = V^{0,1}(\underline{x} + V^{1,2}) + V^{0,2}\underline{z} = V^{0,1}\underline{x} + (V^{0,1}V^{1,2} + V^{0,2})\underline{z}$$

zu $\underline{r}^T = (3300, 3600, 1100, 8000)$

Lösung:
Materialfluß

1.20

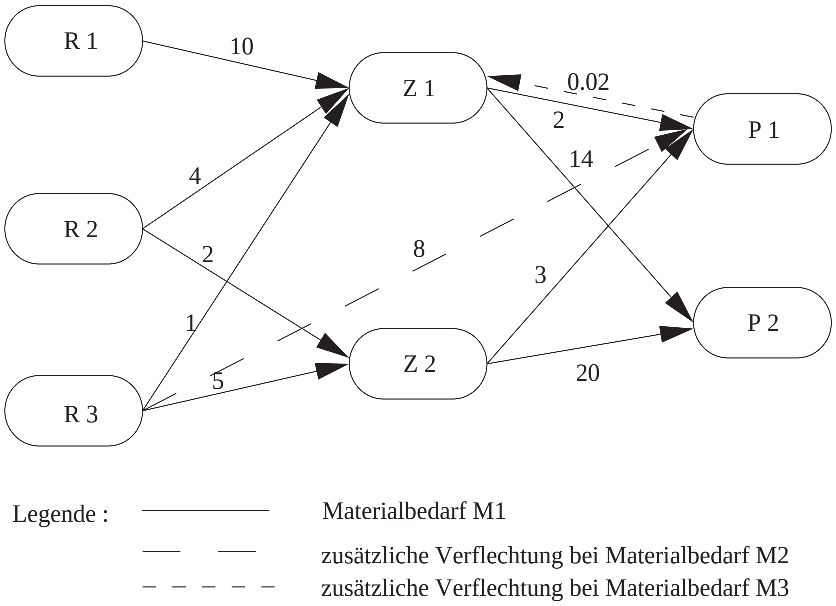


Der spezifische Bedarf e_{ij} *an Teilen* $T_i (i = 1, \ldots, 4)$ *zur Erzeugung des Enderzeugnisses* $E_j (j = 1, 2)$ *wird durch die Matrix* $E = (e_{ij})$ *angegeben:*

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 19 & 14 \\ 12 & 6 \\ 18 & 25 \end{pmatrix}$$

Lösung:

I) <u>*Materialfluß*</u>:



II) <u>*Mehrstufige Modelle*</u> *sind in den Fällen (M1) und (M2) sinnvoll, wegen der Rückkopplung zwischen Z_1 und P_1 nicht aber in (M3).*

<u>*Modellgrößen*</u> *(unter Verwendung fiktiver Zwischenprodukte im Fall (M2))*

1.21

Fall (M1)	*Fall (M2)*	
$\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$	*ebenso*	*Vektor der Rohstoffmengen*
$\underline{z} = (z_1, z_2)^T$	$\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$	*Vektor der Zwischenproduktmengen* *(Z_3 ist fiktives Zwischenprodukt)*
$\underline{p} = (p_1, p_2)^T$	*ebenso*	*Vektor der Finalproduktmengen*
$V^{0,1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$V^{0,1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	*Materialflußmatrix der 1. Stufe*
$V^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$	$V^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 20 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	*Materialflußmatrix der 2. Stufe*

$V^{0,1}_{ij}$*: spezifischer Bedarf an R_i zur Produktion von Z_j*
$V^{1,2}_{ij}$*: spezifischer Bedarf an Z_i zur Produktion von P_j*

<u>*Beziehungen bei realisierbarer Produktion*</u>

$$\underline{z} \geq V^{1,2}\underline{p} \qquad \text{und} \qquad \underline{r} \geq V^{0,1}\underline{z},$$

dabei gibt $\underline{p}$ die Gesamtproduktion an Endprodukten an (die wegen nicht auftretender Rückkopplung vollständig absetzbar ist).

<u>*Überschüssige Zwischenprodukte*</u>

$$\left[\underline{z} - V^{1,2}\underline{p}\right]_i \;, \quad i = 1,2 \;; \quad \text{vektoriell} \quad \underline{z} - V^{1,2}\underline{p}$$

<u>*Überschüssige Rohstoffe*</u>

Fall (M1) : $\underline{r} - V^{0,1}\underline{z}$

Fall (M2) : $\left.\begin{array}{ll} \left[\underline{r} - V^{0,1}\underline{z}\right]_i & i = 1,2 \\ r_3 - \left[V^{0,1}\underline{z}\right]_3 + z_3 - \left[V^{0,2}\underline{p}\right]_3 & i = 3 \end{array}\right\}$ *Überschuß an R_i*

Lösung:
(Fortsetzung)

III) *"Komplexes Modell": Modellgrößen*

$$\underline{x} = (r_1, r_2, r_3, z_1, z_2, p_1, p_2)^T$$

(Bedeutung wie unter II)
$E = (e_{ij})_{i,j=1,\dots,7}$ *Eigenverbrauchsmatrix*
mit e_{ij}*: Bedarf an* X_i *zur Gewinnung von 1 ME* X_j*.*

$$E = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & u & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ u = e_{36} = \begin{cases} 0 & (M1) \\ 8 & (M2), (M3) \end{cases} \\ v = e_{64} = \begin{cases} 0 & (M1), (M2) \\ 0.02 & (M3) \end{cases} \end{array}$$

Bei realisierbarer Produktion muß gelten $\underline{x} \geq E\underline{x}$*; die entstehenden Überschüsse (= absetzbare Rohstoffe, Zwischen- und Endprodukte) werden durch* $\underline{y} := (I-E)\underline{x}$ *angegeben.*

IV) *Materialbedarfsermittlung für (M1), (M2) und*

V) *zahlenmäßige Ergebnisse: Variante 1: Rechnung im mehrstufigen Modell*

Mit $\underline{p} = (1000, 2000)^T$ *und* $\underline{z}^a = \begin{cases} (400;0) & \text{bei (M1)} \\ (400;0;0) & \text{bei (M2)} \end{cases}$ *folgt*

$$\underline{r} = \begin{cases} V^{0,1}V^{1,2}\underline{p} & a) \\ V^{0,1}(\underline{z}^a + V^{1,2}\underline{p}) & b) \end{cases};$$

also

$$\underline{r} = \begin{cases} (300000, 206000, 245000)^T & \text{(M1) Fall a)} \\ (304000, 207600, 245400)^T & \text{(M1) Fall b)} \\ & \\ (300000, 206000, 253000)^T & \text{(M2) Fall a)} \\ (304000, 207600, 253400)^T & \text{(M2) Fall b)} \end{cases}$$

Variante 2: Rechnung im komplexen Modell
Entsprechend der Zerlegung $\underline{x}^T = (\underline{r}^T, \underline{z}^T, \underline{p}^T) =: (\underline{x}^{r\,T}, \underline{x}^{z\,T}, \underline{x}^{p\,T})$ *wird E in Blöcke zerlegt:*

$$\begin{array}{c} E = \left[\begin{array}{ccc} E^{rr} & E^{rz} & E^{rp} \\ E^{zr} & E^{zz} & E^{zp} \\ E^{pr} & E^{pz} & E^{pp} \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{3 Zeilen} \\ \text{2 Zeilen} \\ \text{2 Zeilen} \end{array} \\ \\ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & \text{Spalten} \end{array} \end{array}$$

Aufgrund der speziellen Wahl von E in M1, M2 folgt

$$I - E = \left[\begin{array}{c|cc|cc} & -10 & 0 & 0 & 0 \\ I & -4 & -2 & 0 & 0 \\ & -1 & -5 & -u & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{I} & -2 & -14 \\ & & & -3 & -20 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} I & -E^{rz} & -E^{rp} \\ 0 & I & -E^{rp} \\ 0 & 0 & I \end{array}\right] (u \text{ s.o.})$$

In der "Überschußgleichung" $\underline{y} = (I-E)\underline{x}$ $(*)$ *ist* $\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{y}^r \\ \underline{y}^z \\ \underline{y}^p \end{pmatrix}$ *gegeben,* $\underline{x}$ *unbekannt und* $\underline{x}^r$ *gesucht.*
$(*)$ *lautet ausführlich*

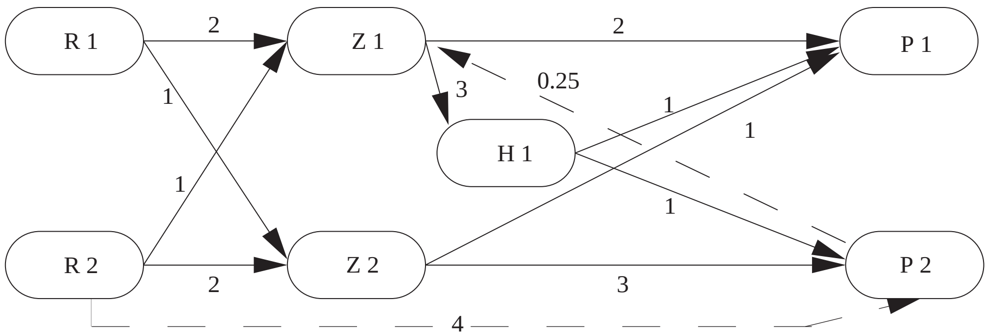
$$\left.\begin{array}{rcl} \underline{y}^r & = & \underline{x}^r - E^{rz}\underline{x}^z - E^{rp}\underline{x}^p \\ \underline{y}^z & = & \underline{x}^z - E^{zp}\underline{x}^p \\ \underline{y}^p & = & \underline{x}^p \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \underline{x}^r & = & \underline{y}^r + E^{rz}\underline{x}^z + E^{rp}\underline{x}^p \\ \underline{x}^z & = & \underline{y}^z + E^{zp}\underline{x}^p \\ \underline{x}^p & = & \underline{y}^p \end{array}$$

Die zahlenmäßigen Ergebnisse für $\underline{x}^r$ *sind mit denen für* $\underline{r}$ *aus Variante 1 identisch.*

1.22 (ECOMP)

Lösung:

a)



Legende : ——— Teil a

— — zusätzliche Verflechtungen bei Teil b

Es ist zweckmäßig, die Knoten des Gozintographen wie folgt umzubezeichnen:
$(X_1, \ldots, X_7) := (R_1, R_2; Z_1, Z_2; H_1; P_1, P_2)$.
Das komplexe Materialflußmodell wird dann durch die 7×7*-Matrix* $E = (e_{ij})$ *und die Vektoren* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_7)^T$ *und* $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_7)^T$ *beschrieben. Dabei bezeichne*

e_{ij} *den spezifischen Materialbedarf an* X_1 *zur Erzeugung von* X_j

x_i *die (innerbetriebliche) Gesamtproduktion am Knoten* i *und*

y_i *den für den Absatz außerhalb des Unternehmens verfügbaren Teil von* x_i

Es gilt

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Vektor $\underline{y}$ *der absetzbaren Produktion ist wie folgt vorgegeben:*
$\underline{y}^T = (0, 0, 0, 0, 0, 250, 100)$, *b)* $\underline{y}^T = (0, 0, 0, 20, 5, 250, 100)$.
Der zugehörige Gesamtoutputvektor $\underline{x}$ *ergibt sich als Lösung der Gleichung*

$$\underline{y} = \underline{x} - E\underline{x} \text{ zu } \underline{x} = (I - E)^{-1}\underline{y}, \text{ wobei } (I - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 & 33 & 56 & 36 \\ 0 & 1 & 14 & 2 & 42 & 72 & 52 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 12 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Es folgt

a) $\underline{x}^T = (3650, 2650, 1550, 550, 350, 250, 100)$

b) $\underline{x}^T = (17600, 23200, 6200, 5200, 1900, 250, 1650)$

c)

Fall a)	$\underline{x}^T$	=	(	*3700,*	*2705,*	*1565,*	*570,*	*355,*	*250,*	*100*	)
Fall b)	$\underline{x}^T$	=	(	*17785,*	*23450,*	*6260,*	*5265,*	*1920,*	*250,*	*1665*	)

Deutung: Bedarf an	R_1	R_2					
Gesamtproduktion an			Z_1	Z_2	H_1	P_1	P_2

Lösung:

I) *Es gilt:*

i) $\underline{\pi}^{1^T} = \underline{\pi}^{0T} V^{0,1}$

ii) $\underline{\pi}^{2^T} = \underline{\pi}^{1T} V^{1,2}$

iii) $\underline{\pi}^{2^T} = \underline{\pi}^{0T} V^{0,1} V^{1,2} = \underline{\pi}^{0T} V$

1.23 II) $K = K(\underline{\pi}^0, p) = \underline{\pi}^{0T} V^{0,1} V^{1,2} \underline{p} (= \underline{\pi}^{1T} V^{1,2} \underline{p} =) \underline{\pi}^{2^T} \underline{p}$

III) *Es gilt:*

i) $\underline{\pi}^{1^T} = (3,8) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = (65, 14)$

ii) $\underline{\pi}^{2^T} = (3,8) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (65, 14) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (144, 265)$

IV) $K = \underline{\pi}^{2^T} \underline{p} = (144, 265) \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = 4720$

Lösung:

2.1 $\underline{p} \cdot \underline{q}^T + \underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -12 & -17 \\ 17 & 17 & 4 & 15 \\ 23 & -27 & -24 & -40 \\ 6 & 24 & 12 & 27 \end{pmatrix}, \qquad \underline{q}^T \cdot \underline{p} + \underline{b}^T \cdot \underline{a} = 39$

Lösung:

2.2 $\underline{r} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix}, \underline{t} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

2.3 *Für die gewählten Vektoren muß gelten:* $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3 = 0$.

Lösung:

(Gerade durch $P_1 = (1;1)$ *und* $P_2 = (3;5)$*)*

a) *Durch die gegebenen Punkte lassen sich zwei Gleichungen aufstellen, wobei s der Steigung und a dem Achsenabschnitt (Schnittpunkt der y-Achse mit der Gerade) entspricht.*
$1 = s1 + a$
$5 = s3 + a$
Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man: $4 = 2s \Rightarrow s = 2$.
Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich dann a=-1 und damit folgt für die Funktionsgleichung:
$x_2 = 2x_1 - 1$

2.4 b) *Parameterdarstellung (Beispiel):*
$\{\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R\}$

c) *Normalenform, z. B. mit* $\underline{n}^T = (2, -1)$:
$(\underline{x}, \underline{n}) = (\underline{x_0}, \underline{n})$ *; hier:* $2x_1 - x_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 1$

d) *Hessesche Normalenform:*
$\{\underline{x} \in I\!R^2, (\underline{n} \mid \underline{x} - \underline{x}_0) = 0\}$ *mit* (1) $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *oder* (2) $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und*
z.B. $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.5 **(Z)**

Lösung:

a) *(vorzeichenbehaftete) Länge des Lotes vom Koordinatenursprung* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *auf die Gerade aus (2.4) :* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *in HNF $b(1)$ für die Gerade einsetzen:*

$l = (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} | - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

die Länge des Lotes ist $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b) *Lotfußpunkt* $\underline{g}$

$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - l \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

2.6

Lösung:

a) Funktionsdarstellung:

$E = \left\{ \underline{x} \in I\!R^3 \mid x_3 = x_1 + x_2 + 3 \right\}$

(Erklärung: Für alle Punkte der Ebene muß folgende Darstellung gelten:

$\underline{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$

Man kann damit drei Gleichungen aufstellen: $x_1 = -6 + 7\alpha + 9\mu$

$x_2 = 4 - 6\alpha + 9\mu$

$x_3 = 1 + \alpha + 3\mu$

Wenn man diese Gleichungen auflöst, erhält man die oben angegebene Gleichung.)

b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in I\!R \right\}$

c) Normalenform:

Berechnung eines Normalenvektors n:

Es muß gelten: $(\underline{n} \mid \underline{r}) = 0$

$(\underline{n} \mid \underline{s}) = 0$

(wobei $\underline{r}$ und $\underline{s}$ die Richtungsvektoren der Ebenengleichung sind)

Aus diesen Bedingungen lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$7n_1 - 6n_2 + 1n_3 = 0$ *und* $9n_1 - 12n_2 - 3n_3 = 0$

Man erhält folgende Bedingungen: $n_1 = n_2$ *und* $n_3 = -n_1$.

Wählt man z. B. $n_1 = 1$, *so erhält man:* $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für die Normalenform gilt dann: $(\underline{x}, \underline{n}) = \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

2.7

Lösung:

Lösung in der Übung

2.8 *Lösung:*
e), f): die Vektoren sind linear unabhängig.
a), b), c) d), g): die Vektoren sind linear abhängig.

2.9 *Lösung:*
a) $2,5\underline{a} = \underline{b}$, *b)* $3\underline{a} + \frac{12}{7}\underline{b} - \underline{c} = \underline{d}$, *c)* $\underline{c} = -3\underline{b}$, *d)* $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, *g)* $\underline{a} - 2\underline{b} = \underline{c}$

2.10 *Lösung:*

a) $\underline{a}$,$\underline{b}$ *und* $\underline{c}$ *sind genau dann linear abhängig, wenn für* (x, z) *gilt*

$x^2 - 6x + 6 \neq 0$ *(d.h.* $x \neq 3 \pm \sqrt{3}$*) und* $z = \frac{12x}{x^2-6x+6}$.

In diesem Fall gilt $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = 0$, *wobei* (α, β, γ) *wie folgt gewählt werden können:*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} (-\frac{\gamma x}{2(1-x)}, \quad \frac{\gamma x^2}{6(1-x)}, \quad \gamma) & \gamma \neq 0 \quad \textit{beliebig}, \quad \textit{falls} \quad x \neq 1 \\ (\alpha, \quad -\frac{\alpha}{3}, \quad 0) & \alpha \neq 0 \quad \textit{beliebig}, \quad \textit{falls} \quad x = 1 \end{cases}$$

b) $\underline{a}$ *und* $\underline{b}$ *sind genau dann linear abhängig, wenn* $(u, v, w) = (-1, -5, 17)$ *gilt.*
In diesem Fall gilt $3\underline{a} + \underline{b} = 0$.

2.11 *Lösung:*
$\underline{a}$, $\underline{b}$ *und* $\underline{c}$ *sind linear abhängig* $\Leftrightarrow$
es gilt $v \neq -6, u = -\frac{v^2+24}{v+6}$ *und* $w = \frac{210}{6+v} + v - 24$.

In diesem Fall gilt $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = 0$ *mit*

$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, \frac{6+v}{15}, 2 - \frac{12+2v}{5})$ *für beliebiges* $\alpha \neq 0$.

2.12 *Lösung:*

a) i) *Wenn die Vektoren* $\underline{b_1}$ *und* $\underline{b_2}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^2$ *bilden, so müssen sie linear unabhängig sein, also müssen für* $\beta_1\underline{b_1} + \beta_2\underline{b_2} = 0$ *gelten:*
$\beta_1 = 0$ *und* $\beta_2 = 0$.

Folgende Überlegungen können angestellt werden:

$\beta_1\underline{b_1} + \beta_2\underline{b_2} = 0$

$\beta_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$<=> V^{0,1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$

$<=> \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (V^{0,1})^{-1}0 = 0$, *falls* $(V^{0,1})^{-1}$ *existiert.*

Es gilt: $\det(V^{0,1}) = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 23 \neq 0$ *damit sind* $\beta_1 = \beta_2 = 0$ *dann folgt, daß* $\underline{b_1}$ *und* $\underline{b_2}$ *linear unabhängig und damit auch eine Basis des* $\mathbb{R}^2$ *sind.*

ii) *und iii) analog*

b) i) $\underline{z} = V^{1,2}\underline{p} = p_1\underline{c^1} + p_2\underline{c^2}$

ii) $\underline{r} = V^{0,1}\underline{z} = z_1\underline{b^1} + z_2\underline{b^2}$

iii) $\underline{r} = V^{0,1}\underline{z} = V^{0,1}V^{1,2}\underline{p} = p_1\underline{d^1} + p_2\underline{d^2}$

2.13 *Lösung:*
(Z)-*Aufgabe*

Lösung:

i) Es sei
(1) $\alpha\underline{a}^1 + \beta\underline{b}^1 = 0$ für $\alpha, \beta \in I\!R$
Nach Voraussetzung gilt weiterhin: $\underline{b}^1 = b_{11}\underline{a}^1 + b_{12}\underline{a}^2$
Dies eingesetzt in (1) liefert:
(2) $0 = \alpha\underline{a}^1 + \beta(b_{11}\underline{a}^1 + b_12\underline{a}^2)$
$\quad = (\alpha + \beta b_{11})\underline{a}^1 + (\beta b_{12})\underline{a}^2$

$\underline{a}^1$ und $\underline{a}^2$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig, daher ist (2) nur mit folgenden Koeffizienten möglich:

2.14 (3) $0 = \alpha + \beta b_{11}$
(4) $0 = \beta b_{12}$

(4) kann durch b_{12} (nach Voraussetzung $\neq 0$) dividiert werden und liefert $\beta = 0$, und dann folgt mit (3) $\alpha = 0$.
Insgesamt folgt somit aus (1): $\alpha = \beta = 0$, d.h. $\underline{a}^1$ und $\underline{b}^1$ sind linear unabhängig, bilden also wegen $dim(I\!R^2) = 2$ eine Basis von $I\!R^2$.

ii) Es gilt: $\underline{b}^2 = (b_{21} - \frac{b_{11}}{b_{12}b_{22}})\underline{a}^1 + \frac{b_{22}}{b_{12}}\underline{b}^2$.
Damit folgt: $\alpha = \frac{b_{11}}{b_{12}b_{22}}$ und $\beta = \frac{b_{22}}{b_{12}}$.

Lösung:

i) Die Menge M_1 ist linearer Teilraum von $I\!R^{n,n}$, da $a_{i,j} = 0 \forall i \geq j$ und damit auch $ka_{i,j} = 0$ und $a_{i,j} + b_{i,j} = 0$.

ii) Die Menge M_2 ist kein linearer Teilraum von $I\!R^{n,n}$, da für ein Skalar $k < 0$ gilt: $kA \notin M_2$.

iii) Die Menge M_3 ist linearer Teilraum von $I\!R^{n,n}$, da auch bei Addition und Multiplikation mit Skalaren gilt: $a_{1,1} > a_{n,n}$.

2.15 iv) Die Menge M_4 ist kein linearer Teilraum von $I\!R^{n,n}$, da z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar sind, aber $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

v) Die Menge M_5 ist linearer Teilraum von $I\!R^{n,n}$, da für $a_{11} + a_{nn} = 0$ und $b_{11} + b_{nn} = 0$ auch gilt:
$a_{11} + b_{11} + a_{nn} + b_{nn} = 0$ und $k(a_{11} + a_{nn}) = 0$ für $k \in I\!R$

Lösung:
Folgende Matrizen sind nicht invertierbar: B,C,H

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -5/28 & 1/28 \\ -1/2 & 3/24 & 5/14 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.16

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/2 & -19/12 \\ 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -26 & 52 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -7 \\ -11 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Aus der Bilanzgleichung folgt allgemein:
$(I-A)\underline{x}=\underline{y}$,
und sofern eine Inverse existiert: $\underline{x}=(I-A)^{-1}\underline{y}$

2.17

Hier gilt: $\underline{x}=(I-A)^{-1}\underline{y}$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \underline{y}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0.1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \underline{y}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,375 & 0,225 & 0,425 \\ 0,625 & 1,375 & 0,375 \\ 0,875 & 0,325 & 1,725 \end{pmatrix} \underline{y}$$

2.18 *Lösung:*
(*)-Aufgabe

3.1 *Lösung:*
$rg(A)=4,\quad rg(B)=3,\quad rg(C)=3$
$rg(D)=3,\quad rg(E)=2,\quad rg(F)=1.$

Lösung:

a) *Man kann folgende Gleichungen aufstellen:* $k + l = 5$ *und* $k \cdot l = 6$.
Durch Auflösen erhält man $k = 2$ *und* $l = 3$ *und dann gilt* $rg(T) = k + l - 1 = 4$.

b) *Man bringt die Transportmatrix auf eine geeignete Form:*

$$T = \begin{pmatrix} 1...1 & & & \\ & ... & & 0 \\ 0 & & ... & \\ & & & 1...1 \\ E_l & ... & ... & E_l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0...0 & -1...-1 & .. & .. & -1...-1 \\ & 1...1 & & & \\ & & & ... & 0 \\ & 0 & & ... & \\ & & & & 1...1 \\ E_l & ... & & ...\ ... & E_l \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0...0 & 0...0 & .. & .. & 0...0 \\ & 1...1 & & & \\ & & ... & & 0 \\ & 0 & & ... & \\ & & & & 1...1 \\ E_l & ... & ... & ... & E_l \end{pmatrix}$$

und liest dann den Rang $rg(T) = k + l - 1$ *ab, was sich mit dem Spezialfall in a) deckt.*
Ausführlich: Es seien $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k, \underline{a}_{k+1}, \ldots \underline{a}_{k+l}$ *die Zeilenvektoren der Transportmatrix, die das Format* $(k + l, k \cdot l)$ *hat. Es gilt nun*

3.2

$\underline{a}_1 + \cdots + \underline{a}_k = (1, \ldots, 1) \in I\!R^{k \cdot l}$
$\underline{a}_{k+1} + \cdots + \underline{a}_{k+l} = (1, \ldots, 1) \in I\!R^{k \cdot l}$

hieraus folgt

$\underline{a}_1 = -\underline{a}_2 - \cdots - \underline{a}_k + \cdots + \underline{a}_{k+l}$

Die Zeilenvektoren sind somit linear abhängig, daher muß $rgT \leq k + l - 1$ *gelten.*
Andererseits sind die $k + l - 1$ *Zeilenvektoren* $\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{k+l}$ *linear unabhängig, woraus* $rgT \geq k + l - 1$ *(und somit* $rgT = k + l - 1$*)*
folgt.
(Gilt nämlich für eine Linearkombination
$\underline{y} := \alpha_2 \underline{a}_2 + \cdots, +\alpha_{k+l} \underline{a}_{k+l}$ *(*)*
die Gleichheit $\underline{y} = 0$, *so müssen insbesondere die ersten* l *Koordinaten von* $\underline{y}$ *gleich Null sein.*
Wegen
$y_1 = \alpha_{k+1}, \ldots, y_l = \alpha_{k+l}$
muß auch $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{k+l} = 0$ *gelten.*
Somit muß $\underline{y}$ *von der Form* $\underline{y} = \alpha_2 \underline{a}_2 + \cdots + \alpha_k \underline{a}_k$ *sein.*
Hieraus sieht man, daß $y_{2l} = \alpha_2, \ldots, y_{kl} = \alpha_k$ *gilt.*
Daher kann auch keiner der Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *von 0 verschieden sein, d.h. die Darstellung (*) ist trivial.)*

Lösung:

3.3 *Es gilt* $rg(B) = rg(I) = 3$. *Da die Einheitsmatrix* I *vollen Rang besitzt, kann sich die Teilmatrix* A *nicht rangmindernd auswirken.*

Lösung:
Wir unterziehen das Gleichungssystem dem Austauschverfahren. Es ergeben sich die folgenden Tableaus :

T_1	x	y	z	1
u	2	$\boxed{-1}$	-1	$-b^2$
v	1	0	1	$b-1$
w	1	-1	-2	$-b$
	2	*	-1	$-b^2$

T_2	x	z	1
y	2	-1	$-b^2$
v	1	1	$b-1$
w	$\boxed{-1}$	-1	b^2-b
	*	-1	b^2-b

Bei diesen Tableaus ist das Pivotelement durch ein Rechteck gekennzeichnet. Beim nächsten Schritt erhalten wir die Lösbarkeitsbedingung für das Gleichungssystem: b^2-1 *muß verschwinden (gekennzeichnet im dritten Tableau). Im vierten Tableau ist dann die Lösungsspalte für die beiden Fälle ausgewertet :*

T_3	z	1
y	1	b^2-2b
v	0	$\boxed{b^2-1}$
x	-1	b^2-b

T_4	z	1(b=1)	1(b=-1)
y	1	-1	3
x	-1	0	2

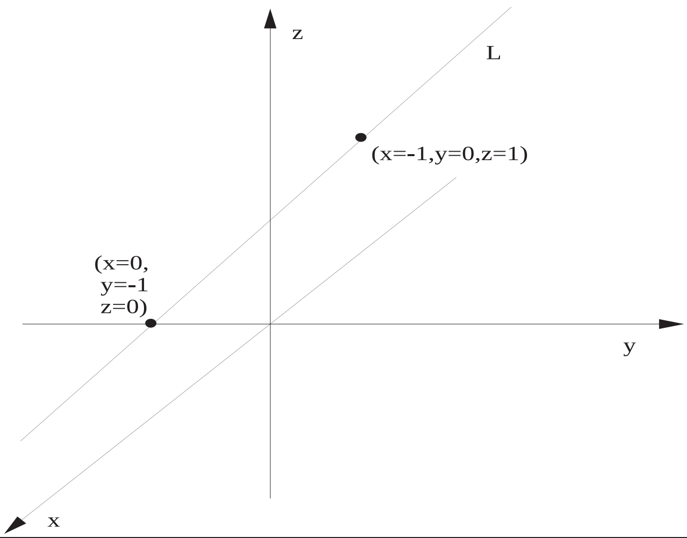
Für den Fall $b=1$ *liest man dann die äquivalenten Darstellungen ab:*

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nu \in I\!R \right\}, \end{aligned}$$

3.4 *ebenso im Fall* $b=-1$:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nu \in I\!R \right\}, \end{aligned}$$

(hierbei kann jeweils die erste Darstellung direkt abgelesen, die zweite und dritte z.B. durch Weitertausch im Ergebnistableau ermittelt werden). Im Fall $b=1$ *sieht die Lösung wie folgt aus:*



Lösung:

a) *Das Gleichungssystem läßt sich mit dem Austauschverfahren z.B. wie folgt bearbeiten:*

T_1	x_1	x_2	x_3	1
h_1	1	1	-1	-9
h_2	1	2	1	-12
h_3	-1	-1	4	12
h_4	-2	1	3	$-u$

T_2	x_2	x_3	1
x_1	-1	1	9
h_2	1	2	-3
h_3	0	3	3
h_4	3	1	$-u-18$

T_3	x_3	1
x_1	3	6
x_2	-2	3
h_3	3	3
h_4	-5	$-u-9$

T_4	1
x_1	3
x_2	5
x_3	-1
h_4	$-u-4$

Somit ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $u=-4$ ist. In diesem Fall ist $\underline{x}=(3,5,-1)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung.

b) *Wie in a) mit dem Austauschverfahren :*

3.5

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	1
h_1	1	1	2	-1	5
h_2	1	2	-1	1	6
h_3	-2	1	-3	1	-3
h_4	2	-1	-1	$-u$	-9

T_2	x_2	x_3	x_4	1
x_1	-1	-2	1	-5
h_2	1	-3	2	1
h_3	3	1	-1	7
h_4	-3	-5	$2-u$	-19

T_3	x_3	x_4	1
x_1	-5	3	-4
x_2	3	-2	-1
h_3	10	-7	4
h_4	-14	$8-u$	-16

T_4	x_4	1
x_1	-1/2	-2
x_2	1/10	-11/5
x_3	7/10	-2/5
h_4	$-u-\frac{9}{5}$	$-\frac{52}{5}$

T_5	1
x_1	$-2+\dfrac{26}{5u+9}$
x_2	$-\dfrac{11}{5}-\dfrac{26}{25u+45}$
x_3	$-\dfrac{2}{5}-\dfrac{182}{25u+45}$
x_4	$-\dfrac{52}{5u+9}$

Für $u\neq-\frac{5}{9}$ ist dann die Lösung
$x=\frac{1}{9+5u}\cdot(8-10u,-25+11u,-40-2u,-52)^T$,
sonst ist das Gleichungssystem unlösbar.

Lösung:

a) *Es gilt* $rg(A) = 2$ *und* $rg(A,b) = 3$, *das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.*

b) *Es gilt* $rg(A) = rg(A,b) = 3$, *wir erhalten also eine einparametrige Lösungsmenge*

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 0 \\ 2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17/5 \\ -7/5 \\ 9/5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

c) *Es ist* $rg(A) = 2$ *und* $rg(A,b) = 3$; *das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.*

3.6 d) *Es ist* $rg(A) = rg(A,b) = 3$; *wir erhalten die eindeutige Lösung* $x = (-1, 4, -2)^T$.

e) *Es gilt* $rg(A) = 3$ *und* $rg(A,b) = 4$; *das Gleichungssystem ist nicht lösbar.*

f) *Es ist* $rg(A) = rg(A,b) = 2$; *wir erhalten die einparametrige Lösungsschar*

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

g) *Es ist* $rg(A) = rg(A,b) = 3$. *Dieses führt auf die einparametrige Lösungsschar*

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Lösung:

a) *Die eindeutige Lösung ist* $x = (3, -\frac{1}{2}, 5)^T$.

b) *Wegen* $rg(A) = 2$ *ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, sondern besitzt einen eindimensionalen Lösungsraum, der zum Beispiel die folgenden Parameterdarstellungen besitzt :*

3.7

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

c) *Analog zu b) folgt wegen* $rg(A) = 1$:

$$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) *Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung :* $\underline{x} = (3, -4, 1, -1, 7)^T$.

Lösung:
zu Aufgabe 3.5
a) Das homogene Gleichungssystem ist unabhängig vom Parameter u und das homogene Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung.
b) Für $u \neq -\frac{9}{5}$ ist die Matrix regulär, das homogene Gleichungssystem hat daher nur die triviale Lösung. Im anderen Fall besteht die Lösung aus der einparametrigen Menge

$$N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$$

zu Aufgabe 3.6

a) $rg(A) = 2 < 3 \Rightarrow N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$

b) $rg(A) = 3 < 4 \Rightarrow N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$

c) $rg(A) = 2 < 5 \Rightarrow N =$

3.8

$$\left\{ x = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/2 \\ 7/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in I\!R \right\}.$$

d) $rg(A) = 3 \Rightarrow N = \{0\}.$
e) $rg(A) = 3 \Rightarrow N = \{0\}.$

f) $rg(A) = 2 < 3 \Rightarrow N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$

g) $rg(A) = 3 < 4 \Rightarrow N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$

zu Aufgabe 3.7
a) Da A invertierbar ist, existiert für das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung.
b) Es gilt $\det(A) = 0$. Deshalb existieren nichttriviale Lösungen. Sie bilden den Nullraum

$$N = \left\{ \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}.$$

c) Die Matrix ist nicht regulär und es gibt eine zweiparametrige Lösungsmenge :

$$N = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in I\!R \right\}.$$

d) Hier existiert wieder nur die triviale Lösung, da die Matrix A regulär ist.

Lösung:

3.9

a)	$x_1 = 4$	*b)*	$x_1 = 28$	*c)*	$x_1 = 4$	*d)*	$x_1 = 1$
	$x_2 = -2$		$x_2 = -14$		$x_2 = 5$		$x_2 = 0$
					$x_3 = 6$		$x_3 = 0$

Lösung:

a) Jeder der Vektoren läßt sich als Linearkombination der übrigen schreiben.

b) Die Darstellungen lauten:

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{b} + \lambda_2 \underline{c} + \lambda_3 \underline{d} \ mit \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R \right\}$$

3.10

$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{c} + \lambda_3 \underline{d} \ mit \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R \right\}$$

$$\underline{c} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{d} \ mit \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R \right\}$$

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \ mit \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R \right\}$$

Lösung:

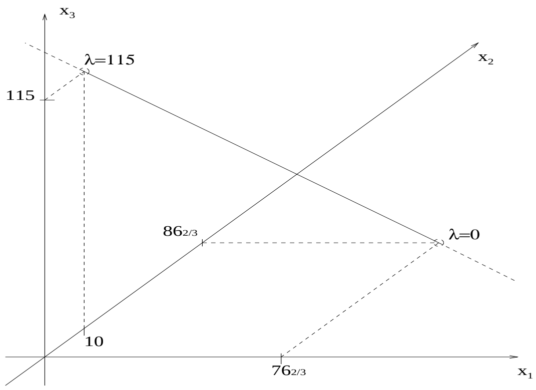
a) *Sollen alle Materialien verbraucht werden, so müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 240 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 230 \end{aligned}$$

Dieses unterbestimmte Gleichungssystem hat die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 230/3 \\ 260/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \mu \in I\!R \right\} \\ &= \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 115 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \nu \in I\!R \right\} \end{aligned}$$

b) *Es ergibt sich die folgende Darstellung einer Gerade*



3.11

c) *Ökonomisch sinnvoll sind diejenigen Lösungen, bei denen der Lösungsvektor komponentenweise nichtnegativ ist. Betrachtet man die Skizze unter b), so ist das derjenige Teil der Geraden, der im ersten Oktanden liegt. Dieses ist für*
$0 \le \lambda \le 115$ *der Fall (für die anderen Parameterdarstellungen muß entsprechend gelten* $10 \le \mu \le 260/3$ *bzw.* $0 \le \nu \le 230/3$*).*

d) *Dazu betrachten wir die einzelnen Komponenten der Lösung (mit der erstgenannten Parameterdarstellung):*

$$\begin{aligned} x_1 = &\quad 76\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\lambda &= \quad 77 - \tfrac{1}{3}(1+2\lambda) \\ x_2 = &\quad 86\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\lambda &= \quad 87 - \tfrac{1}{3}(1+2\lambda) \\ x_3 = &\quad \lambda \end{aligned}$$

Sollen die einzelnen Komponenten ganzzahlig sein, so ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen die Forderung, daß $(1 + 2\lambda)$ *durch 3 teilbar sein muß; aus der dritten Gleichung ergibt sich, daß* λ *ganzzahlig sein muß. Insgesamt also : Wähle ein ganzzahliges* n*, so daß* λ *aus der Gleichung* $1 + 2\lambda = 3n$ *ganzzahlig ist, also* $\lambda = \frac{3n-1}{2} \in Z\!\!Z$ *für ein ganzzahliges* n *gilt. Wählen wir nun* n *ungerade,* $n = 2m+1$*, so folgt:* $\lambda = 3m+1, m \in Z\!\!Z$*. Die gesuchte Parameterdarstellung für ganzzahlige Lösungen lautet also:*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 230 \\ 260 \\ 0 \end{pmatrix} + (3m+1) \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 76 \\ 86 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, m \in Z\!\!Z. \end{aligned}$$

Soll die Lösung noch komponentenweise nichtnegativ sein, so muß weiterhin $0 \le m \le 38$ *gelten.*

e) *Es sei* $S = x_1 + x_2 + x_3 = 162 - m$ *die Gesamterzeugnismenge. Die maximale Menge ergibt sich dann für* $m = 0$ *zu* $S = 162$*, die minimale Menge ergibt sich für* $m = 38$ *zu* $S = 124$*.*

Lösung:
Aus den Angaben kann man die folgende Tabelle zusammenstellen:

	T_1	T_2	Fonds
M_1	40	65	3600
M_2	50	30	2450

Es bezeichne nun x die Anzahl der Einheiten, die nach Technologie 1 hergestellt sind und y
3.12 *die Anzahl der Einheiten, die nach Technologie 2 hergestellt sind.*
Dann muß offensichtlich gelten :

$$\begin{aligned} 40x + 65y &= 3600 \\ 50x + 30y &= 2450 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x = 25$ und $y = 40$.

3.13

Lösung:

Die Aktienpakete sind $P_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Aus $\lambda P_1 + \mu P_2 = \begin{pmatrix} 130 \\ 180 \\ 80 \\ 340 \end{pmatrix}$ *folgt dann* $\lambda = 3,\ \mu = 2$.

3.14

Lösung:
Analog zu 3.13 schreibt man die Mischungen als

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die Forderungen des Kunden

$$K = 20 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda M_1 + \mu M_2 = K$ *folgt dann* $\lambda = \mu = 10$.

3.15

Lösung:

Bausätze : $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wunsch : $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aus $\lambda B_1 + \mu B_2 = W$ *folgt* $\lambda = 3,\ \mu = -2$. *Diese Lösung ist nicht praktikabel, da* $\mu < 0$.

Lösung:

$$\text{Portfeuilles}: P_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) $a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 = \begin{pmatrix} 54 \\ 16 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = Z$, *wobei* $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_i \geq 0$

Umformen liefert: $a_1P_1 + a_2P_2 + (1 - a_1 - a_2)P_3 = Z$

$a_1(P_1 - P_3) + a_2(P_2 - P_3) = Z - P_3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Lösung: (4) $a_2 = \frac{1}{5}$, (3) $a_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{5}$

b) *bei ausschließlicher Verwendung von* P_1 *und* P_3:

$a_1P_1 + (1 - a_1)P_3 = Z$

$a_1(P_1 - P_3) = Z - P_3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \textit{unlösbar}$$

3.16

c) *Anleger A hat 100[TDM], Ziel* : $\begin{pmatrix} 66 \\ 4 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{1}{100} = Z_A$

Partner P hat 40[TDM], Ziel : $\frac{1}{40} \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \frac{1}{100} = Z_P$

separate Strategie für A:

$a_1(P_1 - P_3) + a_2(P_2 - P_3) = Z_A - P_3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66-50 \\ 4-30 \\ 22-10 \\ 8-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -26 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

unlösbar wegen (4): $a_2 = -\frac{1}{5}$

A kann sein Ziel nicht erreichen.

separate Strategie für P:

$$a_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45-50 \\ 25-30 \\ 15-10 \\ 15-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

aus (4) folgt: $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow_{(3)} a_1 = 0$, $(a_1, a_2, a_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Partner kann allein handeln.

Lösung:

a) *Die Punkte A, B, C bestimmen folgende Ebene:*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in I\!R \right\}$$

Um zu zeigen, daß $D \in E$ ist, bestimme man λ und μ, so daß folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Man erhält $\lambda = 1$ und $\mu = -1$

b) *Parameterdarstellung: siehe a)*
Funktionsdarstellung: $z = f(x, y) = \frac{8}{25}x - \frac{9}{25}y + \frac{51}{25}$

c) *(i) Gerade durch A und B:*

$$g_{AB} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}$$

Gerade durch C und D:

$$g_{CD} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}$$

Die Richtungsvektoren von g_{AB} und g_{CD} sind linear abhängig, also sind die Geraden parallel.

Der Punkt $(2, 6, 9)^T$ liegt auf der Geraden g_{CD}, aber nicht auf der Geraden g_{AB}, da das folgende Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

3.17

$$\begin{array}{rrl} 10 & -4\lambda & = 2 \\ 2 & +6\lambda & = 6 \\ 5 & -2\lambda & = 9 \end{array}$$

D. h. die Geraden sind nicht identisch.

(ii) Analog zu (i) zeigt man, daß die Geraden

$$g_{AD} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\} \text{ und}$$

$$g_{BC} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in I\!R \right\}$$

parallel und nicht identisch sind.
(iii) Da die 4 Geraden in einer Ebene liegen folgt insgesamt, daß sie ein Parallelogramm bilden.

d) *Um die Spurgerade zu bestimmen setzt man in der Parameterdarstellung der Ebene die z-Koordinate Null und erhält z. B. $\lambda = \mu + \frac{5}{2}$.*
Durch Einsetzten in die Gleichung von E erhält man folgende Gerade:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in I\!R \right\}$$

e) *Gleichsetzen der Ebenengleichungen ergibt folgendes Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{rrrlrr} 10 & -4\lambda_1 & -12\mu_1 & = 5 & +4\lambda_2 & +\mu_2 \\ 2 & +6\lambda_1 & +10\mu_1 & = 2 & -3\lambda_2 & \\ 5 & -2\lambda_1 & +2\mu_1 & = 8 & +8\lambda_2 & \end{array}$$

Man erhält z. B. $\lambda_2 = \frac{1}{9}(2 - \mu_2)$.
Einsetzen in eine der Ebenengleichungen ergibt folgende Schnittgerade:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \mu \in I\!R \right\}$$

3.18

Lösung:
Folgendes Gleichungssystem ist jeweils zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 500 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

wobei a,b,c die gesuchten Stückzahlen der Brotsorten A,B,C bezeichnen.

In a) erhält man $a = 9250$, $b = 4000$, $c = 13500$.
In b) bzw. c) erhält man keine bzw. keine sinnvolle Lösung.

3.19

Lösung:
a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ *sind genau dann linear unabhängig, wenn* $x \notin \{0, 14\}$:
Falls $x = 0$ *ist, gilt* $\underline{b} = \underline{c}$ *und für* $x = 14$ *gilt* $\underline{b} = \underline{c} + \frac{1}{4}\underline{a}$
In allen anderen Fällen folgt aus $\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = 0$, *daß* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
b) $\underline{d}_1 = -\frac{3}{2}\underline{a}_1 + \underline{b}_1 + \frac{1}{2}\underline{c}_1$
c) $\underline{e}_1 = \underline{c}_1 - \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3.20

Lösung:
a) Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *folgt* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *also* $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $S_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = 2(x - 2)$, $S' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$