AUFGABE 1 :

Es seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

gegeben. Berechnen Sie – soweit sinnvoll –

	Rechnung	Ergebnis
CD		
$D(A-B)$		
$C^T D^T$		
$(A-C)D$		
$\det A$		
$\det(BC^T)$		
$\operatorname{rg} C$		
A^{-1}		
$\det(AA^{-1})$		

AUFGABE 2 :

Gegeben seien die folgenden Punkte im $I\!R^2$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Skizzieren Sie die konvexe Hülle $\mathcal{H} = conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}, \underline{f})$

(ii) Schreiben Sie $\mathcal{H}$ als konvexe Hülle möglichst weniger der Punkte $\underline{a}, \ldots, \underline{f}$ (ohne Rechnung!)

Antwort

$\mathcal{H}$=conv( )

Erinnerung:

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) Entscheiden Sie, ob der Punkt $g = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{H}$ liegt.
(Begründung zeichnerisch oder rechnerisch!)

<u>Antwort</u>

$g = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt / liegt nicht in $\mathcal{H}$, weil

AUFGABE 3 :

Ein Unternehmen stellt aus 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zwei Produkte her. Die Produktionsdaten sind:

- spezifische Verbrauchsmatrix $V = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 30 & v \\ 48 & 8 \end{bmatrix}$
- Vorratsvektor $\underline{r} = \begin{bmatrix} 60 \\ 150 \\ r \end{bmatrix}$

Die Werte $v = V_{23}$ und $r = \underline{r}_3$ können zu Produktionsbeginn noch beeinflußt werden. Einmal festgelegt, wirken sie sich darauf aus, ob und mit welchen Produktionsplänen $\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ die Vorräte aufgebraucht werden können (die Menge derartiger Produktionspläne werde mit $\mathbb{L}_{oec}$bezeichnet).

Aufgabe:

Ermitteln Sie $\mathbb{L}_{oec}$in Abhängigkeit von v und r:

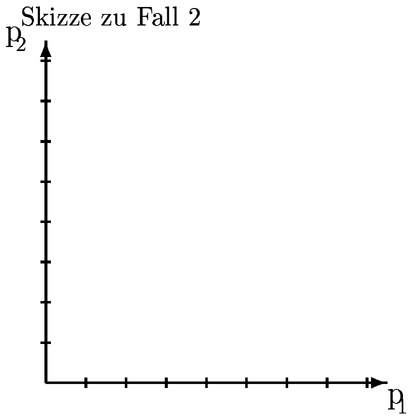
- formelmäßig (z. B. Parameterdarstellung) und
- in Form einer Skizze (soweit möglich).

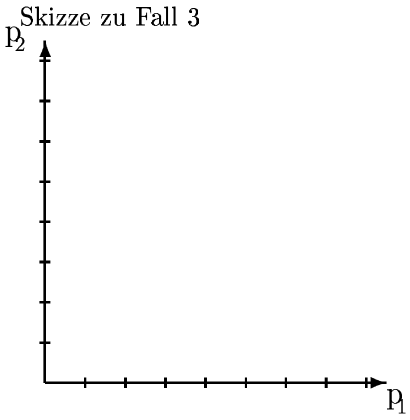
Kommentieren bzw. interpretieren Sie die Ergebnisse verbal!

Lösungstips:

- *Passendes Gleichungssystem aufstellen*
- *Lösbarkeit untersuchen (Fallunterscheidungen für (v, r))*
- *Lösungsmenge rechnerisch ermitteln (falls existent)*
- *auf ökonomisch sinnvolle Lösungen einschränken !*

Fall	Bedingungen an v, r	Produktionspläne
1	v .... r	Formel: $\mathbb{L}_{oec} = \emptyset$ Interpretation: Bei dieser Wahl von v und r können die Vorräte nicht aufgebraucht werden.
2	v .... r	Formel: $\mathbb{L}_{oec} =$ Interpretation:
3	v .... r	Formel: $\mathbb{L}_{oec} =$ Interpretation:


Skizze zu Fall 2
p_2
p_1


Skizze zu Fall 3
p_2
p_1

AUFGABE 4 :

Ein Landwirt will seine 11 ha Land mit Kartoffeln und Gerste bestellen. Die Anbauflächen sollen so bestimmt werden, daß ein maximaler Gesamtgewinn erwartet werden kann. Folgende Informationen stehen zur Verfügung:

		Kartoffeln	Gerste	Limit bzw. Vorrat	
Saatgutpreise	[DM/ha]	250	500	4000	DM
Arbeitszeit	[h/ha]	45	30	450	h
Herbizide	[kg/ha]	200	-	1 800	kg
Gewinn	[DM/ha]	2 500	7 500	-	

Außerdem soll das Verhältnis Gerstenanbaufläche : Kartoffelanbaufläche den Wert 2:3 nicht überschreiten.
Ermitteln Sie

(i) die gewinnmaximalen Anbauflächen für Kartoffeln und Gerste,

(ii) den maximalen Gewinn,

(iii) die Mengen an unverbrauchten Ressourcen (soweit vorhanden)

Anmerkung: Die Aufgabe kann zeichnerisch gelöst werden (siehe nächste Seite); die Koordinaten der optimalen Ecke sind zu berechnen bzw. zumindest rechnerisch zu überprüfen.

Mathematisches Modell:

Variable	Maßeinheit	Bedeutung
x		
y		

Restriktionen (R)	**Bedeutung**
1	
2	
3	
4	
5	

Nichtnegativitätsbedingungen (NN)

Zielfunktion

$G(x, y) =$ $\rightarrow$ max

Lösung:

Optimale Anbaufläche für	Kartoffeln	$x^* =$		ha
Optimale Anbaufläche für	Gerste	$y^* =$		ha
Optimaler Gewinn		$G^* =$		ha
Nicht verbraucht:	Anbaufläche			ha
	Saatgut für			DM
	Arbeitszeit			h
	Herbizide			kg

AUFGABE 5 :

Die Gesamtkostenfunktion eines Unternehmens lautet

$$K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18 \qquad [GE],$$

wobei x die Ausbringungsmenge des produzierten Gutes (in [ME]) bezeichnet. Das Gut kann zu einem konstanten Marktpreis p [GE/ME] in beliebiger Menge abgesetzt werden.

(1) Bestimmen Sie

a) die Grenzkostenfunktion: Maßeinheit

b) die Stückkostenfunktion: Maßeinheit

c) die variablen Kosten (als Funktion): Maßeinhei

d) die Grenzkosten an der Stelle $x = 5$: Maßeinheit

Interpretieren Sie den unter d) gefundenen Wert!

(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

(2) Ermitteln Sie das Stückkostenminimum k_{min} und den zugehörigen Output x_{BO} (d. h. das sog. Betriebsoptimum).
(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

Stückkostenminimum $k_{min} =$ $\boxed{}$

Betriebsoptimum $x_{BO} =$ $\boxed{}$

(3) Beschreiben Sie verbal, wie sich das Unternehmen in den folgenden Fällen verhalten wird:

Fall	Das Unternehmen wird ...
$p > k_{min}$	
$p = k_{min}$	
$p < k_{min}$	

(4) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle x_s, Gewinngrenze x_g, den gewinnmaximalen Output x_{opt}, sowie den Maximalgewinn G_{max} unter der Annahme, daß der konstante Marktpreis $p = 12$ [GE/ME] beträgt.
(Erinnerung: $K(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x + 18$)

Antworten:

Gewinnschwelle	$x_s =$		[ME]
Gewinngrenze	$x_g =$		[ME]
gewinnmaximaler Output	$x_{opt} =$		[ME]
Gewinnmaximum	x_{max}		[GE]