Aufgabe 1 :

Die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 8 & 20 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

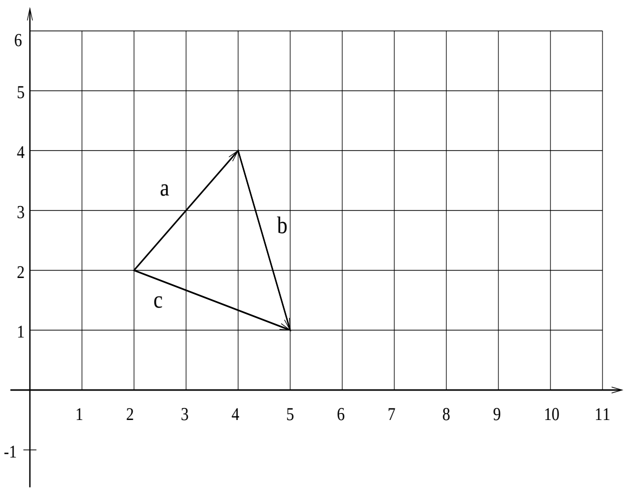
seien gegeben. Berechnen Sie – soweit sinnvoll –

	Rechnung	Ergebnis
CD		
$4A - 4C$		
$A^T C$		
$B^T D$		
A^{-1}		
$\det(C)$		
$\det(ACA^{-1})$		
$\det(BD)$		

Rechnungen:

Aufgabe 2 :

Gegeben seien Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ durch die folgende Skizze:



(i) Welcher rechnerische Zusammenhang besteht zwischen den Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$?

Antwort

$\underline{a} =$

(ii) Lesen Sie die Koordinaten von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aus der Skizze ab:

Antwort

$\underline{a} =$ $\underline{b} =$ $\underline{c} =$

(iii) Tragen Sie den Vektor $\underline{d} := \underline{a} + 2\underline{c} - \underline{b}$ in die Skizze oben ein.

(iv) Skizzieren Sie die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in I\!R^2 \mid x_2 = \frac{1}{5}x_1 - 1 \right\}$ im obigen Diagramm.

(iv) Geben Sie für die Gerade g eine Parameterdarstellung an!

Antwort

$$g = \left\{ \qquad \right\}$$

Rechnungen:

Aufgabe 3 :

Bei der Untersuchung der Frage, wie die in einem Unternehmen vorhandenen Vorräte an zwei Rohstoffen R_1 und R_2 bei der Produktion dreier verschiedener Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 verbraucht werden können, stellt der zuständige Sachbearbeiter das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 12x_3 & = & 48 \end{array}\right\} \quad (*)$$

für die unbekannten Produktionspläne $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ auf und unterzieht es den Nebenbedingungen

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq\,,\ x_3 \geq 0. \qquad (NN)$$

(i) Untersuchen Sie das Gleichungssystem $(*)$ mit Hilfe einer Rangbetrachtung auf Lösbarkeit.

Rang der Koeffizientenmatrix	$r :=$	$\square$	
Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix	$s :=$	$\square$	
Defekt des Gleichungssystems	$d :=$	$\square$	
Das GLS $(*)$ ist $\boxed{\text{lösbar/unlösbar}}$, weil ...	r	$\square$	s gilt.
Jede Basis des Nullraums besteht aus ...		$\square$	Vektor(en).

(ii) Geben Sie den Nullraum $\mathcal{N}$ von $(*)$ an
(d. h., die Lösungsmenge des zu $(*)$ gehörenden homogenen Gleichungssystems).

$$\mathcal{N} = \left\{ \qquad \right\}$$

(iii) Bestimmen Sie die Menge $I\!L$ aller Lösungen von $(*)$
(in Form einer Parameterdarstellung).

$$I\!L = \left\{ \qquad \right\}$$

(iv) Geben Sie die Teilmenge $I\!L_{oec}$ von $I\!L$ aller ökonomisch zulässigen Lösungen von $(*)$ an.
(Man beachte hierzu (NN).)

$$I\!L_{oec} = \left\{ \qquad \right\}$$

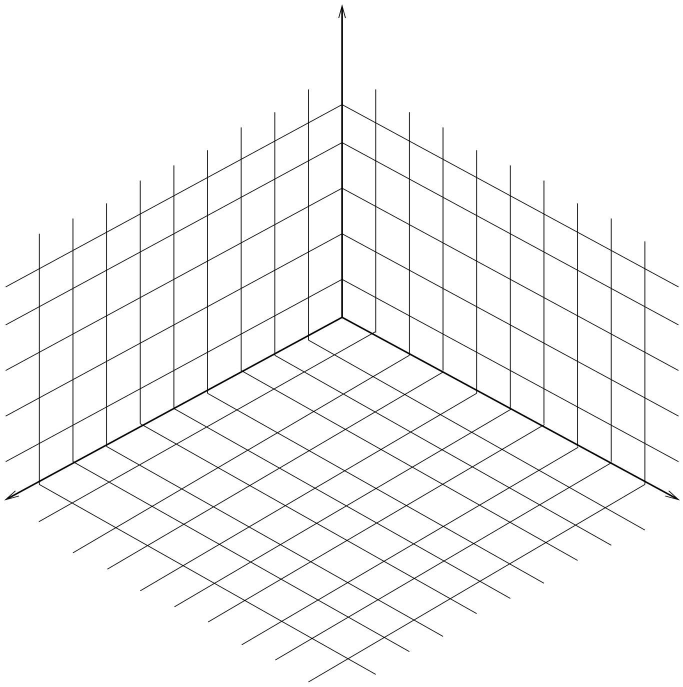
(v) Ist es möglich, $I\!L_{oec}$ in der Form $I\!L_{oec} = conv(\underline{a}, \underline{b})$ darzustellen?

○ NEIN, weil ....

○ JA, z.B. wie folgt:

$$I\!L_{oec} = conv\left(\qquad\qquad\qquad \right)$$

(v) Tragen Sie $I\!L_{oec}$ in die nachfolgende Skizze ein.



Aufgabe 4 :

Eine Tischlerei verfügt in diesem Monat noch über freie Kapazität von 150 Arbeitsstunden. Es sollen Antik-Schränke und -Kommoden hergestellt werden. Bei der Planung ist zu beachten, daß eine Kommode in 10 Arbeitsstunden gefertigt werden kann, während für einen Schrank die fünffache Arbeitszeit benötigt wird. Dabei werden zunächst von den vorhandenen 60 laufenden Metern Spanplatte je Schrank 16 und je Kommode 8 zum Korpus verarbeitet. Anschließend wird dieser mit Spezialfurnieren versehen. Bei der Gewinnkalkulation geht man davon aus, daß je Kommode Spezialfurniere im Wert von 900 DM verbraucht werden, während bei Schränken jeweils ein Drittel dieses Betrages genügt und insgesamt ein Betrag von 4500 DM für den Ankauf von Furnieren zur Verfügung steht. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich ein kalkulierter Gewinn von 240 DM je Schrank und von 200 DM je Kommode.
Welche Anzahl an Schränken bzw. Kommoden ist herzustellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? *(Stellen Sie ein LO-Modell auf und lösen Sie es grafisch!)*

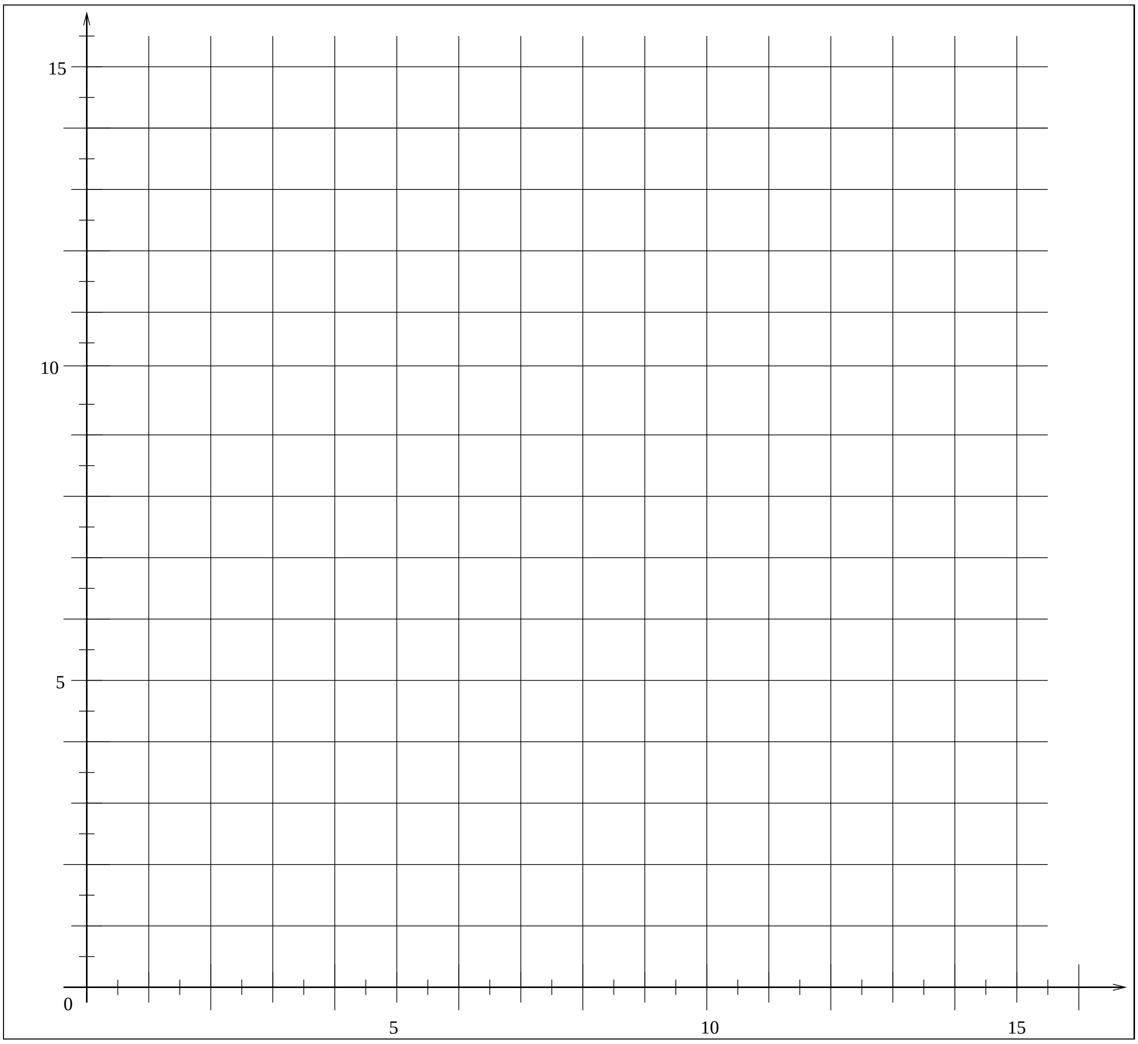
(i) Variable:	Bedeutung	Maßeinheit

(ii) Restriktionen/Nichtnegativitätsbedingungen und deren Bedeutung:

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
⋮

Zielfunktion:

- Restriktionsgeraden in das Diagramm einzeichnen und beschriften!
- Zulässigen Bereich schraffieren!
- Eine Gewinnisoquante einzeichnen; zugehörigen Gewinn angeben!
- Optimalen Punkt einkreisen! (Rechnung unnötig!)



- Geben Sie den optimalen Produktionsplan an:

Anzahlen Schränke:	
Anzahl Kommoden:	
Maximaler Gewinn:	
unverbrauchte Arbeitszeit *[h]*	
unverbrauchte Spanplatten *[lfd. m]*	
unverbrauchte Furniere *für [DM]*	

Aufgabe 5 :

Ein Unternehmen investiert in eine Anlage zur Herstellung eines Konservierungsmittels. Man geht davon aus, daß das Mittel in bliebiger Menge hergestellt und zu einem konstanten Preis von $p = 28$ [GE/ME] abgesetzt werden kann. Die Gesamtkosten bei der Produktion von x ME des Stoffes werden mit $x^2 + 2x + 25$ $[GE]$ veranschlagt.
Ermitteln Sie die folgenden Funktionen und Werte:

		Maßeinheit
Erlösfunktion:	$E(x) =$	
Gewinnfunktion:	$G(x) =$	
Fixkosten:	$K_f =$	
variable Kosten:	$K_v(x) =$	
Stückkosten:	$k(x) =$	
stückvariable: Kosten	$k_v(x) =$	
Gewinnschwelle	$x_{GS} =$	
Gewinngrenze:	$x_{GG} =$	
gewinnmaximaler Output:	$x_{opt} =$	
Maximalgewinn:	$G_{max} =$	
betriebsoptimaler Output:	$x_{BO} =$	
betriebsminimalen Output:	$x_{BO} =$	

Nach Errichtung der Fertigungsstätten, jedoch vor Aufnahme der Produktion fällt der Marktpreis p plötzlich ab.

- Bis zu welcher Preisuntergrenze $p_{min,rent}$ darf der Marktpreis fallen, wenn noch mit Gewinn produziert werden soll?

  $p_{min,rent} =$

- Nach Unterschreitung welcher Preisuntergrenze $p_{\dagger}$ wird die Produktion gar nicht erst aufgenommen?

  $p_{\dagger} =$

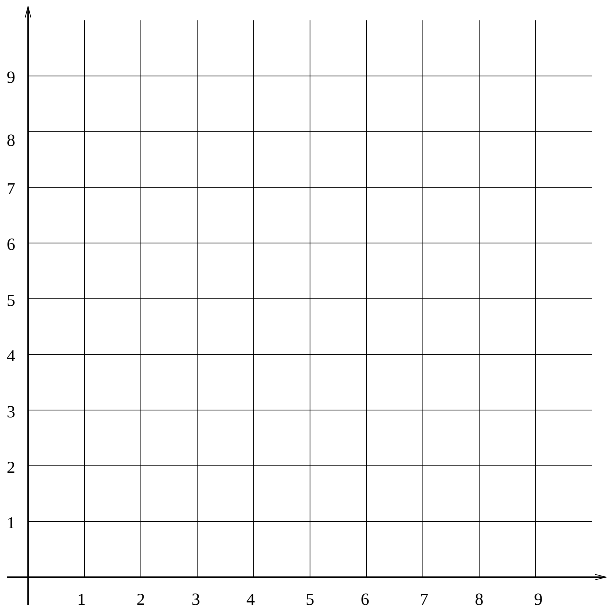
Aufgabe 6 – Wahlmöglichkeit A :

(i) Skizzieren und schraffieren Sie:

$$A := conv\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\right)$$

$$B := conv\left(\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\right)$$

$$C := A \cap B$$



(ii) Begründen Sie ohne Rechnung: $C := A \cap B$ ist $\boxed{\text{konvex/nicht konvex}}$, weil:

(iii) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $\underline{x} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ zu B gehört und stellen Sie ihn gegebenenfalls als konvexe Linearkombination der Ecken von B dar.

Ergebnis (ankreuzen und ergänzen):

○ $\underline{x} \notin B$, weil:

○ $\underline{x} \in B$ hat folgende Darstellung:

(iv) Wir betrachten <u>beliebige</u> Punkte $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ im $I\!R^2$.
Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

(Zutreffendes ankreuzen! Begründung nicht erforderlich!)

		richtig	falsch
(1)	Die lineare Hülle $\mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ ist konvex.	☐	☐
(2)	Die konvexe Hülle $conv(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ ist ein linearer Teilraum des $I\!R^2$.	☐	☐
(3)	$\underline{a} \le \underline{b} \le \underline{c} \implies \underline{b} \in conv(\underline{a}, \underline{c})$	☐	☐
(4)	$\{\underline{a}\}$ ist eine konvexe Menge.	☐	☐

Aufgabe 6 – Wahlmöglichkeit B :

(i) Die folgenden Aussagen sind verbal zu verneinen:

`Alle dicken Westfalen mögen Bier.`

Verneinung:

`Mindestens 2 meiner Regenschirme sind kaputt oder zu klein.`

Verneinung:

`Wenn es nicht neblig ist, schneit oder regnet es.`

Verneinung:

`Die Firma Käsefix stellt Schnitt- oder Schmelzkäse, aber keinen Frischkäse her.`

Verneinung:

(ii) Im Zusammenhang mit dem Obstanbau werden folgende Aussagen betrachtet:

A: `Die Obstpreise fallen.`
B: `Das Wetter ist besser.`
C: `Der Schädlingsbefall nimmt ab.`
D: `Die Erträge steigen.`

Interpretieren Sie verbal:
$D \wedge (A \vee \overline{C})$

$D \Rightarrow (B \wedge C)$

$((\overline{A} \vee B) \wedge C) \Rightarrow D$

Aufgabe 6 – Wahlmöglichkeit C :

Mit Hilfe des Simplexverfahrens soll die Gewinnfunktion

$$G(\underline{x}) = 3x_1 + 5x_2$$

unter den Rohstoffvorratsbeschränkungen

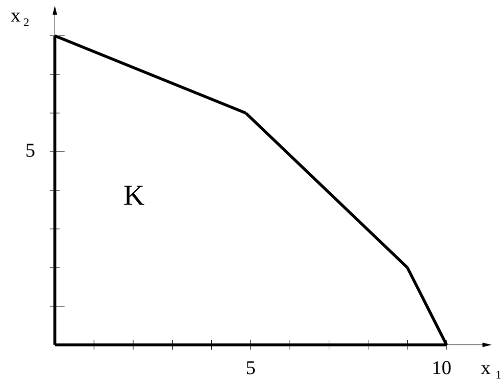
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 20 & (1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 11 & (2) \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 40 & (3) \end{array}$$

bezüglich der Ausbringungsmenge $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ zweier Güter maximiert werden.
Im Verlauf der Rechnung wurde das nachfolgende zulässige Tableau gefunden.

(i) Zwei Verbesserungsschritte sind möglich. Führen Sie sie aus!
(In einem optimalen Tableau nur die zur Auswertung nötigen Werte berechnen!)

T_1	z_1	x_2	1
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10
z_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z_3	1	-4	20
G	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	30

(ii) Kreisen Sie die dem Ausgangstableau T_1 entsprechende Ecke in der nebenstehenden Skizze ein!



(iii) Bestimmen Sie:

optimaler Produktionsplan $\underline{x}_{opt} =$

maximaler Gewinn $G_{max} =$

Überschuß an Rohstoff R_1

Überschuß an Rohstoff R_2

Überschuß an Rohstoff R_3