SERIE 1.9

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

---

2. Die nachfolgenden 4 Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ spannen einen linearen Teilraum $\mathcal{M}$ des $\mathbb{R}^3$ auf (der auch als *lineare Hülle* von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bezeichnet wird):

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}).$$

   (a) Ist diese ganz $\mathbb{R}^3$, eine Ebene, eine Gerade oder ein Punkt?

   (b) Auf wieviele (und beispielsweise welche) dieser 4 Vektoren kann bei der Bildung der linearen Hülle verzichtet werden, ohne daß diese sich verändert?

   (c) Versuchen Sie, $\mathcal{M}$ zu zeichnen.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \underline{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

3. Welche der folgenden Mengen sind lineare Teilräume von $\mathbb{R}^{n,n}$?

   i) Die Menge M_1 oberer $n \times n$-Dreiecksmatrizen

   ii) $M_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \geq 0\}$

   iii) $M_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid a_{11} > a_{nn}\}$

   iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$

   v) $M_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid a_{11} + a_{nn} = 0\}$

   (Begründung!)

---

b.w.

4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \\
 & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3
\end{array} \tag{1}
$$

Bestimmen Sie

(i) den Rang r der Koeffizientenmatrix,
(ii) den Rang r' der erweiterten Koeffizientenmatrix,
(iii) den Defekt d des Gleichungssystems,
(iv) den Nullraum $\mathcal{N}$,
(v) die Menge $\mathbb{L}$ sämtlicher Lösungen.

Ergänzen bzw. korrigieren Sie:

(vi) Das Gleichungssystem (1) ist **lösbar/unlösbar**, weil ....

....

(vii) Das Gleichungssystem (1) **kann/kann niemals** unlösbar werden, wenn die rechte Seite abgeändert wird, denn ....

....

(viii) Wenn das Gleichungssystem (1) überhaupt lösbar ist, so **eindeutig/mehrdeutig**, denn

....

Abgabe: bis 23.01.2002 16.00 Uhr
Box 114, 127, 128, 130 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: 30.01.2002, 9.00 Uhr
AM (Foyer)

ACHTUNG: Die Korrektur der Übungszettel erfolgt alphabetisch nach dem Nachnamen. Deshalb bitte beim Einwurf der Zettel auf die Beschriftung der Kästen achten!