SERIE 1.4

1. In den nachfolgenden Ausdrücken a) - d) seien

   - d, i, j, k, l, m und n natürliche Zahlen
   - λ und μ reellwertige Konstanten
   - $A \in \mathbb{R}^{i,j}, \ B \in \mathbb{R}^{k,l}, \ C \in \mathbb{R}^{m,n}$
   - $D \in \mathbb{R}^{d,d}$ eine invertierbare Matrix.

   Geben Sie **alle** Bedingungen an, denen diese Konstanten bzw. Matrizen genügen müssen, damit folgende Ausdrücke sinnvoll (d.h., definiert) sind.

   a) $AB + C$
   b) $(A + B^T)^T + C$
   c) $C(AA^T + (\lambda D)^{-1})$
   d) $(3\lambda D - 6\mu D)^{-1}\Big((A + B) \cdot C^T\Big)^T$

   Muster: Der Ausdruck AC^TB^{-1} ist sinnvoll, wenn gilt
   1) $j = n$ (d.h., A und C^T sind verkettet)
   2) $k = l$ (d.h., B ist quadratisch)
   3) B ist invertierbar
   4) $m = k(= l)$ (d.h., C^T und B^{-1} sind verkettet).

---

2. Eine Volkswirtschaft bestehe aus den Sektoren Energieerzeugung (E), Schwerindustrie (S) und Übrige (K) (wobei zu den “ übrigen” Branchen auch die privaten Haushalte und der Export gerechnet werden mögen). Im vergangenen Jahr lieferte der Energiesektor 49500 GWh Energie an die Schwerindustrie und 81000 GWh an die übrigen Sektoren, benötigte jedoch seinerseits Zulieferungen aus der Schwerindustrie im Werte von 26,1 Mrd. DM. Die Schwerindustrie lieferte außerdem Material im Werte von 72,9 Mrd. DM an die übrigen Sektoren.

   Bei unveränderter Technologie sollen die übrigen Sektoren im Folgejahr 90900 GWh Energie und Leistungen der Schwerindustrie im Wert von 108000 **Mio.** DM erhalten.

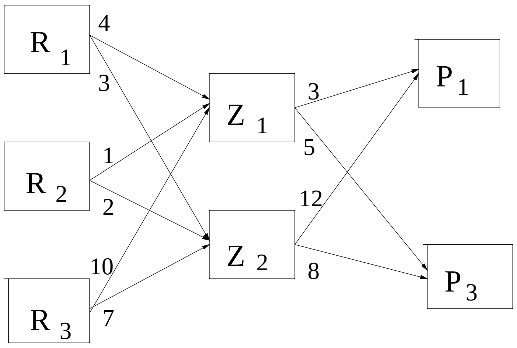
   (a) Welche Leistungen müssen der Energiesektor und die Schwerindustrie dafür insgesamt erbringen?
   (b) Wieviel Energie wird die Schwerindustrie dabei verbrauchen?
   (c) Welchen Wert werden die Leistungen der Schwerindustrie für den Energiesektor annehmen?

   HINWEISE:

- Stellen Sie die erhaltenen Informationen zunächst übersichtlich dar - z.B. in tabellarischer Form.
- Wenn Sie einen Gozintographen zeichnen, genügen (E) und (S) als Knoten! (Warum?)
- Ermitteln Sie dann die absolute Verbrauchsmatrix A und die spezifische Verbrauchsmatrix V für dieses Problem. (Dies sind (2,2)-Matrizen! Es genügt *wenig* Rechnung!)
- Aus den obigen Angaben kann sowohl die Bruttoproduktion (= Gesamtproduktion) als auch die Nettoproduktion (= absetzbare Produktion) der Sektoren (E) und (S) abgelesen werden. Führen Sie dafür passende mathematische Größen (Vektoren) ein. Denken Sie daran, deren Bedeutung zu erklären.
- Geben Sie eine Gleichung an, in der die Verflechtungsmatrix, die Brutto- und die Nettoproduktion des vergangenen Jahres vorkommen.
- Leiten Sie daraus eine Gleichung ab, mit deren Hilfe die Bruttoproduktion des nächsten Jahres aus der vorgegebenen Nettoproduktion ermittelt werden kann.
- Zum Schluß: Berechnen Sie die benötigten Zahlenwerte.

---

3. Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 in einer ersten technologischen Stufe zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und hieraus in einer zweiten Stufe zwei Endprodukte P_1 und P_2 her. Der dabei auftretende spezifische Materialbedarf wird durch folgenden Gozintographen verdeutlicht:



a) Stellen Sie Matrizen V^{RZ} und V^{ZP} auf, die den spezifischen Materialbedarf für die erste bzw. zweite Stufe des Produktionsprozesses beschreiben. Welches Format müssen diese Matrizen besitzen? Erklären Sie die Bedeutung ihrer Elemente!

b) Geben Sie eine Matrix V^{RP} so an, daß jedes Element v_{ij}^{RP} den spezifischen Bedarf an Rohstoff R_i zur Erzeugung des Endproduktes P_j ausweist.

c) Das Unternehmen möchte in diesem Kalenderjahr eine *Endproduktion* von

p_1 ME P_1 und
p_2 ME P_2

erzielen und zusätzlich eine *Reserve* von

z_1 ME Z_1 bzw.
z_2 ME Z_2

an den Zwischenprodukten anlegen.

Führen Sie zur Bezeichnung der o.g. End- bzw. Zwischenproduktion geeignete Vektoren $\underline{p}$ bzw. $\underline{z}$ ein. $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ gebe den dabei auftretenden Rohstoffbedarf an R_1, R_2 und R_3 (in ME) an.

Geben Sie Gleichungen für $\underline{r}$ an, in der $\underline{r}$ mit Hilfe von

- $\underline{p}$, $\underline{z}$, V^{RZ} und V^{ZP} bzw.
- $\underline{p}$, $\underline{z}$, V^{RZ} und V^{RP}

ausgedrückt wird.

d) Welches zahlenmäßige Ergebnis ergibt sich im Fall
$\underline{p} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ $[ME]$ und $\underline{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $[ME]$?

Abgabe: bis 05.11.2001 16.00 Uhr
Box 127, 128, 130, 114 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: 12.12.2001, 9.00 Uhr
AM (Foyer)

ACHTUNG: Die Korrektur der Übungszettel erfolgt alphabetisch nach dem Nachnamen. Deshalb bitte beim Einwurf der Zettel auf die Beschriftung der Kästen achten!