



SERIE 1.11

1. Welche der nachfolgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind konvex ?
(Skizze und Begründung – z. B. durch Nachrechnen!)

- a) Das Viereck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix}$
- b) $\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- c) $M = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + x_2 \geq 8 \}$
- d) $N = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \geq x_2 \}$
- e) $P = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\| = 1 \}$
- f) $Q = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 5 \}$

2. Im \mathbb{R}^2 seien die Punkte

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Skizzieren Sie:
- $\text{conv}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}, \underline{f})$
 - $\text{conv}(\underline{a}, \underline{d}, \underline{e})$
 - $\text{conv}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e})$.
- b) Welche der Vektoren können in den Fällen a(i) - a(iii) weggelassen werden, ohne daß die konvexe Hülle sich verändert?
- c) Auf wieviele Arten (und wie) läßt sich
- \underline{e} als konvexe LK von \underline{a} , \underline{b} und \underline{c}
 - \underline{c} als konvexe LK von \underline{b} und \underline{d}
 - \underline{c} als konvexe LK von \underline{b} , \underline{d} und \underline{f}
 - \underline{a} als konvexe LK von \underline{d} und \underline{e}
 - \underline{a} als konvexe LK von \underline{a} , \underline{d} und \underline{e}
- darstellen?

3. Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$Z := \frac{3}{50}x + \frac{1}{20}y \rightarrow \text{Max}$$

mit den linearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 17x + 10y &\leq 170 \\ 8x + 11y &\leq 88 \\ 3x + 8y &\leq 48 \end{aligned}$$

und Nichtnegativitätsbedingungen

$$x, y \geq 0.$$

- Skizzieren Sie den zulässigen Bereich in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte und tragen Sie diese ebenfalls in die Zeichnung ein.
- Optimieren Sie die Zielfunktion grafisch. (Hinweis: Parallelverschiebung einer Gewinnisokante!) Berechnen Sie zur Kontrolle die Werte der Zielfunktion in den Eckpunkten.
- Ermitteln Sie das Maximum von Z unter der zusätzlichen Bedingung, daß nur ganzzahlige Lösungen zugelassen sind.
(Hinweis: Skizzieren Sie die konvexe Hülle des in a) enthaltenen ganzzahligen Gitters! (Es ist nicht notwendig, die Koordinaten der Eckpunkte davon zu berechnen.))

4. Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Begründung / Gegenbeispiel !)
(Für beliebige $n \geq 3$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$:)

- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear unabhängig
 $\Leftrightarrow \underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{c}$ sind linear unabhängig
- Aus $\mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}) = \mathcal{L}(\underline{b}, \underline{c})$ folgt $\dim \mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 2$.
- Aus $\underline{a} \in \text{conv}(\underline{b}, \underline{c})$ folgt $\underline{a} \in \mathcal{L}(\underline{b}, \underline{c})$.
- Die Menge aller nichtnegativen (n, n) -Matrizen ist konvex.
- $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})) = \mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$
- $(a^3 - (\sqrt{a^2})^3)^5 = 0$

- g) Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

Abgabe: bis 06.02.2002 16.00 Uhr
Box 114, 127, 128, 130 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 12.02.2002, ECOMENT – Büro
Zeiten siehe Aushang

ACHTUNG: Die Korrektur der Übungszettel erfolgt alphabetisch nach dem Nachnamen. Deshalb bitte beim Einwurf der Zettel auf die Beschriftung der Kästen achten!