SERIE 1.10

1. Wir betrachten die Gleichungssysteme $A\underline{x} = \underline{y}$ mit

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -14 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & -2 \\ 14 & 2 & -98 & 12 \\ 2 & 6 & -14 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 22 \\ 5 \\ 70 \\ 22 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 48 \end{bmatrix}$

(i^1) Was läßt sich anhand einer Rangbetrachtung über die Lösbarkeit von a) und b) aussagen?

(i^2) Ermitteln Sie jeweils den Nullraum ($\mathcal{N}$) und die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Gleichungssytems (wenn möglich, in Form einer Parameterdarstellung!).

Hinweis: Mit eventuell auftretenden Brüchen kann exakt weitergerechnet werden!

---

2. Für die Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Betrieb zwei verschiedene Materialarten. Der Mengenbedarf und -vorrat ist in der Tabelle gegeben.

Material	E1	E2	E3	Materialvorrat
M1	4	2	1	80
M2	0	1	2	20

Wieviele Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit das gesamte Material verbraucht wird?

a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dem die gesuchten Ergebnismengen notwendigerweise genügen, und bestimmen Sie dessen allgemeine Lösung (Parameterdarstellung).

b) Stellen Sie die unter (a) gefundene Lösungsmenge graphisch dar.

c) Kennzeichnen Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsteilmenge
– in Form einer Parameterdarstellung
– graphisch.

d) Stellen Sie fest, ob ganzzahlige Lösungen des Problems existieren, und geben Sie ggf. eine Parameterdarstellung dafür an.

e) Welche (ganzzahligen) Erzeugnismengenkombinationen ergeben eine maximale bzw. minimale Gesamterzeugnismenge?

---

3. Im $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

   Geben Sie alle Möglichkeiten an, den Punkt $\underline{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ als konvexe Linearkombination von $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ und $\underline{d}$ darzustellen!

   (Gesucht ist also die Menge aller Koeffizientenvektoren

   $$\mathcal{H} = \{\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \underline{m} = \lambda_1\, \underline{a} + \lambda_2\, \underline{b} + \lambda_3\, \underline{c} + \lambda_4\, \underline{d}\,;\; \underline{\lambda} \geq 0\,;\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1\},$$

   mit deren Hilfe $\underline{m}$ als konvexe LK von $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ und $\underline{d}$ geschrieben werden kann.
   Geben Sie eine Parameterdarstellung für $\mathcal{H}$ an!)

---

4. *Vorbereitung auf Thema 5*

   (i) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, für die gilt

   $$4x_1 + 3x_2 \leq 24 \tag{1}$$

   Tip: Zunächst ein wenig "probieren" !

   (ii) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, für die die folgenden Ungleichungen **gleichzeitig** erfüllt sind:

   $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 24 & (1)\\ 4x_1 + 9x_2 &\leq 36 & (2)\\ x_1 &\geq 0 & (3)\\ x_2 &\geq 0 & (4) \end{aligned}$$

   (iii) Wie kommt es, daß alle Punkte, die (1) genügen, auf ein- und derselben Seite der Gerade

   $$4x_1 + 3x_2 = 24$$

   liegen? Welche Rolle spielt der Normalenvektor $\underline{n} = [4, 3]^T$?

Abgabe: bis 30.01.2002 16.00 Uhr
Box 114, 127, 128, 130 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: 06.02.2002, 9.00 Uhr
AM (Foyer)

ACHTUNG: Die Korrektur der Übungszettel erfolgt alphabetisch nach dem Nachnamen. Deshalb bitte beim Einwurf der Zettel auf die Beschriftung der Kästen achten!