1 Austauschsatz und Austauschverfahren

1.1 Ausgangspunkt

Es sei $\mathcal{M}$ ein linearer Raum mit $\dim\mathcal{M} = \mathrm{n}$.
Bekanntlich

- lassen sich beliebig viele Basen von $\mathcal{M}$ angeben (die jeweils aus n Basisvektoren bestehen)
- kann es je nach dem betrachteten Problem zweckmäßig sein, sich eine passende Basis zu suchen ($\nearrow$ ÜA)

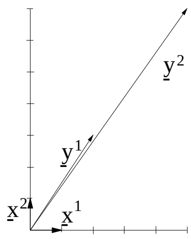
? lassen sich die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Basen übersichtlich darstellen und evtl. ausnutzen?

Ex. 1.1.1 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, dann bilden

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aber auch $\underline{y}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\underline{y}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

jeweils eine Basis.



Zusammenhänge (nachrechnen):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d. h.

$$\underline{y}^1 = 2\underline{x}^1 + 3\underline{x}^2 \qquad \underline{x}^1 = -7\underline{y}^1 + 3\underline{y}^2$$

und

$$\underline{y}^2 = 5\underline{x}^1 + 7\underline{x}^2 \qquad \underline{x}^2 = 5\underline{y}^1 - 2\underline{y}^2$$

tabellarisch

	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$
$\underline{y}^1$	2	3
$\underline{y}^2$	5	7

und

	$\underline{y}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{x}^1$	-7	3
$\underline{x}^2$	5	-2

in Matrixform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \end{pmatrix}}_{=:\,\underline{\underline{y}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}_{=:\,A}\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{pmatrix}}_{=:\,\underline{\underline{x}}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}_{=:\,B}\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{y}}}$$

($\underline{\underline{x}}$ und $\underline{\underline{y}}$ sind hier "Spaltenvektoren", deren Komponenten Vektoren sind);

einfacher also

$$\underline{\underline{y}} = A \cdot \underline{\underline{x}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{x}} = B \cdot \underline{\underline{y}} \tag{1}$$

$$\text{einsetzen} \quad \swarrow\searrow$$

$$\underline{\underline{y}} = AB\underline{\underline{y}} \qquad\qquad \underline{\underline{x}} = BA\underline{\underline{x}} \tag{2}$$

Vermutung

$$AB = \qquad I \qquad = AB \tag{3}$$

Probe

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: A ist invers zu B und umgekehrt !

Bem 1.1.1 Mit der Bezeichnung $C := AB$ lautet die linke Gleichung in (2)

$$\underline{\underline{y}} = C\underline{\underline{y}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

es gilt also

$$\underline{y}^1 = c_{11}\underline{y}^1 + c_{12}\underline{y}^2 \tag{5}$$

andererseits natürlich

$$\underline{y}^1 = 1 \cdot \underline{y}^1 + 0 \cdot \underline{y}^2 \tag{6}$$

(5) und (6) sind zwei Darstellungen ein und desselben Vektors (nämlich $\underline{y}^1$) als Linearkombination der Vektoren $\underline{y}^1$ und $\underline{y}^2$. Da $\underline{y}^1$ und $\underline{y}^2$ eine Basis von $\mathcal{M}$ bilden, gibt es nur eine solche Darstellung ("Adressensatz"), somit muß $c_{11} = 1$ und $c_{12} = 0$ gelten.

Eine Wiederholung dieses Arguments mit der 2. Zeile von (4) liefert dann $c_{21} = 0, c_{22} = 1$, insgesamt also

$$AB = C = I$$

Analog sieht man, daß $BA = I$ gilt.
Die "Probe" in (3) kann also durch diese wesentlich weitergehende Überlegung ersetzt werden und liefert nun den folgenden Satz.

Satz 1.1.1 Es seien $\mathcal{M}$ ein n-dimensionaler linearer Raum und $\underline{\underline{x}} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n)^T$ und $\underline{\underline{y}} = (\underline{y}^1, \ldots, \underline{y}^n)^T$ zwei Basen von $\mathcal{M}$, dann

(i) existieren eindeutig bestimmte (n,n)-Matrizen A und B mit

$$\underline{\underline{y}} = A\underline{\underline{x}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x}} = B\underline{\underline{y}}$$

(ii) diese sind invertierbar und es gilt

$$AB = I = BA$$

(d. h. $A = B^{-1}$ und $B = A^{-1}$).

1.2 Idee für rechnerische Matrixinversion

Geg. Matrix A

T_1	$\underline{y}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{x}^1$	2	3
$\underline{x}^2$	5	7

Ges. Matrix $B = A^{-1}$

	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$
$\underline{y}^1$	?	?
$\underline{y}^2$	?	?

Idee

	$\underline{y}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{x}^1$		
$\underline{x}^2$		

$\xrightarrow[\underline{x}^1 \leftrightarrow \underline{y}^1]{\text{1. Tausch}}$

	$\underline{x}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{y}^1$		
$\underline{x}^2$		

$\xrightarrow[\underline{x}^2 \leftrightarrow \underline{y}^2]{\text{2. Tausch}}$

	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$
$\underline{y}^1$		
$\underline{y}^2$		

Wesen

$$\begin{aligned} \underline{x}^1 &= 2\underline{y}^1 + 3\underline{y}^2 \\ \underline{x}^2 &= 5\underline{y}^1 + 7\underline{y}^2 \end{aligned} \quad \downarrow \quad \begin{aligned} \underline{y}^1 &= \ldots\underline{x}^1 + \ldots\underline{y}^2 \\ \underline{x}^1 &= \ldots\underline{x}^1 + \ldots\underline{y}^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\xrightarrow{2.2} \\ &\xrightarrow{2.1} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \underline{y}^1 &= \ldots\underline{x}^1 + \ldots\underline{x}^2 \\ \underline{y}^2 &= \ldots\underline{x}^1 + \ldots\underline{x}^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{\underline{x}^1 = 2\underline{y}^1 + 3\underline{y}^2}$ $\rightarrow$

(1) $\underline{y}^1$ erhält den Koeffizienten 1
(Folge: $\underline{x}^1$ erhält den Koeffizienten 1/2
$\underline{y}^2$ erhält den Koeffizienten 3/2)
$\frac{1}{2}\underline{x}^1 = \underline{y}^1 + \frac{3}{2}\underline{y}^2$

(2) es wird nach $\underline{y}^1$ aufgelöst
(Folge: Vorzeichenwechsel beim
Koeffizienten von $\underline{y}^2$)

$\rightarrow$ $\mathbf{\underline{y}^1 = \frac{1}{2}\underline{x}^1 - \frac{3}{2}\underline{y}^2}$

$\mathbf{\underline{x}^2 = 5\underline{y}^1 + 7\underline{y}^2}$ $\rightarrow$

Ergebnis von oben einsetzen:
$\underline{x}^2 = 5(\frac{1}{2}\underline{x}^1 - \frac{3}{2}\underline{y}^2) + 7\underline{y}^2$

(3) Koeffizient von $\underline{x}^1$ bilden $(= \frac{5}{2})$

(4) Koeffizient von $\underline{y}^2$ zusammenfassen
$(= 7 + 5(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2})$

$\rightarrow$ $\mathbf{\underline{x}^2 = \frac{5}{2}\underline{x}^1 - \frac{1}{2}\underline{y}^2}$

Schematisierung des 1. Tausches

T_1	$\underline{y}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{x}^1$	2	$\langle 3 \rangle$
$\underline{x}^2$	[5]	$\boxed{7}$

$\longrightarrow$

T_2	$\underline{x}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{y}^1$	$\frac{1}{2}$	$\langle\langle -\frac{3}{2} \rangle\rangle$
$\underline{x}^2$	$[[\frac{5}{2}]]$	$\boxed{\boxed{-\frac{1}{2}}}$

(1) ○ "Pivotelement" (PE)

$$\textcircled{\tfrac{1}{2}} = \boxed{\mathrm{PE}_{\mathrm{neu}} = \frac{1}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}} = \frac{1}{2}$$

(2) ⟨ ⟩ sonstiges Element der Pivot*zeile* (PZ)

$$\langle\langle -\tfrac{3}{2}\rangle\rangle = \boxed{\mathrm{PZ}_{\mathrm{neu}} = -\frac{\mathrm{PZ}_{\mathrm{alt}}}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}} = -\frac{\langle 3\rangle}{2}$$

(3) [ ] sonstiges Element der Pivot*spalte* (PS)

$$[[\tfrac{5}{2}]] = \boxed{\mathrm{PS}_{\mathrm{neu}} = \frac{\mathrm{PS}_{\mathrm{alt}}}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}} = \frac{[5]}{2}$$

(4) □ sonstiges "restliches" Element außerhalb der Pivotzeile oder -spalte (PR)

$$\boxed{\boxed{\tfrac{1}{2}}} = \boxed{\mathrm{PR}_{\mathrm{neu}} = \mathrm{PR}_{\mathrm{alt}} + \mathrm{PS}_{\mathrm{alt}}\mathrm{PZ}_{\mathrm{neu}}} = \boxed{7} + [5] \cdot \langle\langle -\tfrac{3}{2}\rangle\rangle$$

praktisch: Kellerzeile

	2	3
	[5]	$\boxed{7}$
	*	$\langle\langle -\frac{3}{2}\rangle\rangle$

$\longrightarrow$

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Der zweite Tausch verläuft dann analog:

$T2$	$\underline{x}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{y}^1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\underline{x}^2$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$\longrightarrow$

$T2$	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$
$\underline{y}^1$		
$\underline{y}^2$		

Da $\underline{x}^2$ gegen $\underline{y}^2$ zu tauschen ist, wird über das Pivotelement $-\frac{1}{2} = \mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}$ in Zeile 2, Spalte 2 getauscht, dieses wird eingerahmt ○ und die Pivotspalte im Keller mit $*$ markiert.

1) $\mathrm{PE}_{\mathrm{neu}} = \dfrac{1}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}$ hier: $-2 = \dfrac{1}{\frac{-1}{2}}$

2) Die restlichen Elemente der (neuen) Pivotzeile ergeben sich gemäß
$\mathrm{PZ}_{\mathrm{neu}} = -\dfrac{\mathrm{PZ}_{\mathrm{alt}}}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}$ hier: $\langle\langle 5\rangle\rangle = -\dfrac{\langle 5/2\rangle}{\frac{-1}{2}}$
und werden in die Kellerzeile eingetragen.

$T2$	$\underline{x}^1$	$\underline{y}^2$
$\underline{y}^1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\underline{x}^2$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{2}$
	$\langle\langle 5\rangle\rangle$	*

$T3$	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$
$\underline{y}^1$		
$\underline{y}^2$	$\langle\langle 5\rangle\rangle$	-2

3) Die restlichen Elemente der (neuen) Pivotspalte ergeben sich gemäß
$\text{PS}_{\text{neu}} := \dfrac{\text{PS}_{\text{alt}}}{\text{PE}_{\text{alt}}} = \dfrac{[-3/2]}{\frac{-1}{2}} = [[3]]$

$$\begin{array}{c|cc} T2 & \underline{x}^1 & \underline{y}^2 \\ \hline \underline{y}^1 & \frac{1}{2} & [\frac{-3}{2}] \\ \underline{x}^2 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \hline & & * \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} T3 & \underline{x}^1 & \underline{x}^2 \\ \hline \underline{y}^1 & & [[3]] \\ \underline{y}^2 & 5 & -2 \end{array}$$

4) Die übrigen Elemente der Matrix werden durch
$\text{PR}_{\text{neu}} = \text{PR}_{\text{alt}} + \text{PS}_{\text{alt}}\text{PZ}_{\text{neu}}$
berechnet.
Hier: $\boxed{\boxed{-7}} = \boxed{\frac{1}{2}} + \langle 5\rangle[[-\frac{3}{2}]]$

$$\begin{array}{c|cc} T2 & \underline{x}^1 & \underline{y}^2 \\ \hline \underline{y}^1 & \boxed{\frac{1}{2}} & [-\frac{3}{2}] \\ \underline{x}^2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & \langle\langle 5\rangle\rangle & * \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} T3 & \underline{x}^1 & \underline{x}^2 \\ \hline \underline{y}^1 & \boxed{\boxed{-7}} & 3 \\ \underline{y}^2 & 5 & -2 \end{array}$$

Damit ist die Berechnung beendet; man erhält

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};$$

wie oben bereits ermittelt.

Beobachtungen

1) Um einen Tausch auszuführen, werden insgesamt 4 Rechenregeln benötigt (für PE, PZ, PS, PR).
Diese Regeln lassen sich unmittelbar auf Matrizen größerer Formate übertragen.

2) Die Regeln können schematisch abgearbeitet werden, so daß während der Rechnung uninteressant ist, welche Bedeutung die Variablen $\underline{x}^i$ und $\underline{y}^j$ haben.
So läßt sich T1 als System von Gleichungen zwischen Variablen x_1, x_2, y_1 und y_2 deuten (aufgelöst nach y_1 und y_2).

$$\begin{array}{c|cc} T1 & x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & 2 & 3 \\ y_2 & 5 & 7 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 5x_1 + 7x_2 \end{array}$$

und T3 liefert die Auflösung nach x_1 und x_2.

$$\begin{array}{c|cc} T3 & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & -7 & 3 \\ x_2 & 5 & -2 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -7y_1 + 3y_2 \\ x_2 = 5y_1 - 2y_2 \end{array}$$

3) Aus (2) erkennt man, daß das Verfahren auch für nicht notwendig quadratische Matrizen funktioniert (↗ Kap. ???)

4) Praktisch wird oft eine Matrix A zu untersuchen sein, von der zunächst nicht klar ist, ob sie eine Inverse besitzt. In diesem Fall muß die Austauschtauschprozedur bereits nach weniger als n Schritten abbrechen. Dies geschieht dadurch, daß irgendwann alle noch zur Verfügung stehenden "Pivot-Kandidaten" 0 sind. (↗ ???)

Ex. 1.2.1 Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Falls A eine Inverse besitzt, kann diese mit dem Austauschverfahren gefunden werden.

Ablauf der Rechnung:

$T1$	x_1	x_2	x_3	$T2$	y_1	x_2	x_3	$T3$	y_1	x_2	y_3	$T4$	y_1	y_2	y_3
y_1	1	2	2	x_1	1	−2	−2	x_1	−1	−2	2	x_1	−1/3	2/3	0
y_2	2	1	1	y_2	2	−3	−3	y_2	−1	−3	3	x_2	−1/3	−1/3	1
y_3	1	2	1	y_3	1	0	−1	x_3	1	0	−1	x_3	1	0	−1
	*	−2	−2		1	0	*		−1/3	*	1				

Beobachtungen, die das Rechnen erleichtern

1. Kommt eine Null in der "restlichen" Pivotzeile (bzw. -spalte) vor, kann die zugehörige Spalte (bzw. Zeile) unverändert in das neue Tableau übernommen werden.
2. Für die Rechnung ist es von Vorteil, wenn das Pivotelement den Wert -1 (bzw. +1) hat, weil in diesem Fall Keller- und neue Pivotzeile mit der alten Pivotzeile identisch sind (bzw. sich nur um den Faktor -1 davon unterscheiden).
3. Die Variablen y_1, y_2 und y_3 können in beliebiger Reihenfolge von links ("aus der Basis") nach oben ("in die Nicht-Basis") getauscht werden.
(Hier wurde zuerst y_3, dann y_2 nach oben getauscht; Vorteil: das Pivotelement hat den Wert -1; Brüche mit dem Nenner 3 wurden vorerst vermieden.)
4. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Pivotelemente auch außerhalb der Hauptdiagonale gewählt werden können (und mitunter müssen); das Ergebnistableau ist dann ggf. umzusortieren.

Ex. 1.2.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
möglicher Tauschablauf:

$T1$	a_1	a_2	a_3	$T2$	a_1	b_1	a_3	$T3$	a_1	b_1	b_2	$T4$	b_3	b_1	b_2
b_1	0	1	0	a_2	0	1	0	a_2	0	1	0	a_2	0	1	0
b_2	0	0	1	b_2	0	0	1	a_3	0	0	1	a_3	0	0	1
b_3	1	0	0	b_3	1	0	0	b_3	1	0	0	a_1	1	0	0
	0	*	0		0	0	*		*	0	0				

Die Matrix in T4 ist **nicht** die gesuchte Inverse von A, weil die Variablen a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 in vertauschter Reihenfolge auftreten.
Man kann T4 sortieren:

$T4$	b_3	b_1	b_2
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1
a_1	1	0	0

$\xrightarrow{\text{Zeilen sortieren}}$

$T4'$	b_3	b_1	b_2
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1

$\xrightarrow{\text{Spalten sortieren}}$

$T4''$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	0	1
a_2	1	0	0
a_3	0	1	0

Das Ergebnis lautet: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Austauschregeln im allgemeinen Fall

Gegeben: (m,n)-Tableau, Inhalt: Matrix A
Gesucht: (m,n)-Tableau, Inhalt: Matrix A' (etwa) nach Tausch über Zeile p, Spalte q.
Voraussetzung: $a_{pq} \neq 0$

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
T1 & S_1 & \cdots & S_q & \cdots & S_j & \cdots & S_n \\
\hline
Z_1 & a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z_p & \cdots & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pj} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z_i & \cdots & \cdots & a_{iq} & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z_m & a_{m1} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{mn} \\
\hline
 & & & * & & -a_{pj}/a_{pq} & &
\end{array}
$$

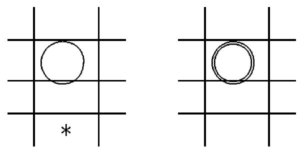
$$
\begin{array}{c|ccccccc}
T2 & S_1 & \cdots & Z_p & \cdots & S_j & \cdots & S_n \\
\hline
Z_1 & a'_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a'_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
S_q & \cdots & \cdots & a'_{pq} & \cdots & a'_{pj} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z_i & \cdots & \cdots & a'_{iq} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z_m & a'_{m1} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a'_{mn} \\
\hline
 & & & * & & -a_{pj}/a_{pq} & &
\end{array}
$$

Tauschregeln
Voraussetzung: PE$\neq 0$, d. h. $a_{pq} \neq 0$

1) $\mathrm{PE}_{\mathrm{neu}} := \dfrac{1}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}$

$a'_{pq} := \dfrac{1}{a_{pq}}$

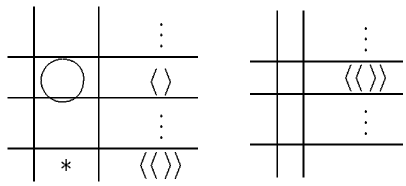
$\circledcirc := \dfrac{1}{\bigcirc}$



2) $\mathrm{PZ}_{\mathrm{neu}} := -\dfrac{\mathrm{PZ}_{\mathrm{alt}}}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}$

$a'_{pj} := -\dfrac{a_{pj}}{a_{pq}} \quad (j \neq q)$

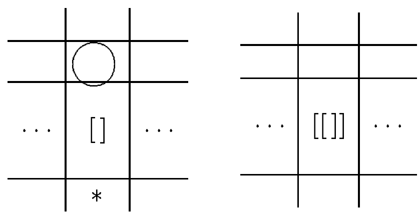
$\langle\langle\,\rangle\rangle := -\dfrac{\langle\,\rangle}{\bigcirc}$



3) $\mathrm{PS}_{\mathrm{neu}} := -\dfrac{\mathrm{PS}_{\mathrm{alt}}}{\mathrm{PE}_{\mathrm{alt}}}$

$a'_{iq} := -\dfrac{a_{iq}}{a_{pq}} \quad (i \neq p)$

$[[\,]] := \dfrac{[\,]}{\bigcirc}$



4) $\mathrm{PR}_{\mathrm{neu}} := \mathrm{PR}_{\mathrm{alt}} + \mathrm{PZ}_{\mathrm{neu}}\mathrm{PS}_{\mathrm{alt}}$

$a'_{ij} := a_{ij} + a'_{pj} \cdot a_{iq} \quad (i \neq p, j \neq q)$

$\boxed{\square} := \square + \langle\langle\,\rangle\rangle \cdot [\,]$