Das Ergebnis (10.37) motiviert die folgende Begriffsbildung:

(11.4) DEF: K sei ein Körper und V ein K–Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unter(vektor)raum** von V, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

U$_1$) $o_V \in U$

U$_2$) $\forall\, u, u' \in U \,:\, u + u' \in U$

U$_3$) $\forall\, a \in K \,\forall\, u \in U \,:\, a \cdot u \in U$.

(11.5) BEISPIELE: a) Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Dann ist die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, o_m) \subseteq K^n$ des **homogenen** LGS's $Ax = o_m$ nach (10.37) ein Unterraum von K^n.

b) In jedem K–Vektorraum V sind die Teilmengen $\{o_V\}$ und V Unterräume von V. Der Unterraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, heißt der **Nullraum**.

c) $U := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

d) Sei $v_0 \in V$ ein fester Vektor. Dann ist

$$U := \{\, a \cdot v_0 \mid a \in K \,\} \subseteq V$$

ein Unterraum von V. U heißt der von v_0 **erzeugte Unterraum** von V.

e) Seien $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Dann ist $U := \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Ein Element aus U heißt eine **Linearkombination** von v_1 und v_2. U heißt auch der von der Teilmenge $\{v_1, v_2\}$ **erzeugte Unterraum** von $\mathbb{R}^3$.

(11.6) BEM: Ein Unterraum $U \subseteq V$ eines K–Vektorraumes V ist für sich selbst betrachtet wieder ein K–Vektorraum.

(11.7) SATZ: K sei ein Körper, V ein K–Vektorraum und $E := \{\, v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine endliche nichtleere Teilmenge von V. Dann ist die Menge

$$\mathcal{L}_K(E) := \{\; a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \;\mid\; a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \;\} \subseteq V$$

ein Unterraum von V, und es gilt $E \subseteq \mathcal{L}_K(E)$.

$\mathcal{L}_K(E)$ heißt der **von E erzeugte Unterraum von** V. Ein Element aus $\mathcal{L}_K(E)$ heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Man schreibt auch $\mathcal{L}_K(E) = \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Außerdem definiert man $\mathcal{L}_K(\emptyset) := \{\, o_V\}$.

(11.8) BEISPIELE: **a)** $E = \{v\} \subseteq V \implies \mathcal{L}_K(v) = \{av | a \in K\} =: Kv$.
Insbesondere $\mathcal{L}_K(o_V) = \{o_V\}$.

b) $E = \{v_1, v_2\} \subseteq V \implies \mathcal{L}_K(v_1, v_2) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 | \, a_1, a_2 \in K\}$

c) Betrachtet man K als K–Vektorraum, so gilt $\mathcal{L}_K(1_K) = K$, also $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_2}(1_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$.

d) Sei $E := \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Teilmenge, die aus den 3 Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ besteht. Dann gilt $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) = \mathbb{R}^3$.

(11.9) DEF: K sei ein Körper und V ein K–Vektorraum. Eine (endliche) Teilmenge $E \subseteq V$ heißt ein **Erzeugendensystem** (abgekürzt: **EZS**) von V, wenn $\mathcal{L}_K(E) = V$ gilt.

(11.10) BEISPIELE: **a)** $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist ein EZS von $\mathbb{R}^3$. Dies gilt auch für K^3.

b) Die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ der Einheitsvektoren in K^n ist ein EZS von K^n.

c) $\{\, 1_K\}$ ist ein EZS von K.

d) $\{\, o_V\}$ und $\emptyset$ sind EZS'e des Nullraumes $\{\, o_V\}$.

Bei einem EZS $E \subseteq V$ können unterschiedliche Fälle auftreten:

a) Jeder Vektor aus V läßt sich auf genau eine Art als Linearkombination der Vektoren aus E darstellen

b) Es gibt Vektoren, die sich auf verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus E darstellen lassen.

Ende WS 2000/01 — Fortsetzung im SS 2001

(11.11) SATZ: Sei V ein K–Vektorraum. Für Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n \in V$ gilt:
$\mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \iff v_n \in \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$

(11.12) DEF: Sei V ein K–Vektorraum. Eine endliche Teilmenge $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\} \subseteq V$ heißt **linear abhängig (über K)**, wenn sich mindestens ein Vektor aus T als Linearkombination der übrigen Vektoren aus T darstellen läßt. Anderenfalls heißt T **linear unabhängig (über K)**. Es wird festgesetzt, daß die leere Menge $\emptyset$ linear unabhängig über K ist.

(11.13) SATZ: **Kriterium für die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit**

Sei V ein K–Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$:

a) T ist genau dann linear abhängig, wenn es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt, die **nicht** alle 0 sind, so daß $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = o_V$ gilt.

b) T ist genau dann linear unabhängig, wenn für beliebige Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = o_V$ folgt, daß alle $a_1, \ldots, a_n$ Null sind.