(10.35) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$, und es sei $v_0 \in K^n$ eine Lösung des LGS's $Ax = b$. Dann gilt:

$$\text{Lös}(A, b) \ = \ \{ v_0 + w \mid w \in \text{Lös}(A, o) \}$$

(10.36) BEM: In (10.35) nennt man $v_0 \in K^n$ eine **spezielle Lösung** des LGS's $Ax = b$. Die **allgemeine Lösung** v des LGS's $Ax = b$ läßt sich dann in der Form

$$v \ = v_0 + w$$

darstellen, wobei w eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS's $Ax = o$ ist.

(10.37) SATZ: Es sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix und $o_m \in K^m$ der Nullvektor. Die Lösungsmenge $L := \text{Lös}(A, o_m) \subseteq K^n$ des homogenen LGS's $Ax = o_m$ besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

a) $\forall\, v, w \in L \,:\, v + w \in L$ **b)** $\forall\, a \in K \;\forall\, v \in L \,:\, av \in L$ **c)** $o_n \in L$

L ist also abgeschlossen gegenüber der Addition und Skalarmultiplikation auf K^n und enthält die Nullspalte aus K^n.

---

§11. Vektorräume

(11.1)) DEF: Sei K ein Körper und V eine Menge mit einer Addition $+ : V \times V \longrightarrow V$, $(v, w) \longmapsto v + w \in V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot_K : K \times V \longrightarrow V$, $(a, v) \longmapsto av \in V$. Dann heißt $(V, +, \cdot_K)$ ein $K-$**Vektorraum** (oder ein **Vektorraum über** K), wenn folgende Eigenschaften gelten:

a) Für die Addition:

A$_0$) $\forall v, w \in V : \quad v + w \in V$

A$_1$) $\forall u, v, w \in V : \quad u + (v + w) = (u + v) + w$

A$_2$) $\forall v, w \in V : \quad v + w = w + v$

A$_3$) $\exists\, o_V \in V \;\; \forall v \in V : \quad v + o_V = v$

A$_4$) $\forall v \in V \;\; \exists w \in V : \quad v + w = o_V$

b) Für die skalare Multiplikation:

SM$_0$) $\forall c \in K \;\forall v \in V : \quad cv \in V$

SM$_1$) $\forall c \in K \;\forall v, w \in V : \quad c(v + w) = cv + cw$

SM$_2$) $\forall c, d \in K \;\; \forall v \in V : \quad (c + d)v = cv + dv$

SM$_3$) $\forall c, d \in K \;\; \forall v \in V : \quad c(dv) = (cd)v$

SM$_4$) $\forall v \in V : \quad 1_K \cdot v = v$

BEZEICHNUNGEN: $(V, +, \cdot_K)$ sei ein K–Vektorraum.

Die Elemente aus V heißen **Vektoren**, die Elemente aus K **Skalare**.

Das Element o_V aus A_3) heißt **Nullvektor** von V. Er ist eindeutig bestimmt.

Das Element w in A_4) heißt der zu v **negative Vektor**. Er ist eindeutig bestimmt und wird mit $\underline{-v}$ bezeichnet.

Die **Differenz** zweier Vektoren ist definiert durch: $\underline{v - w} := v + (-w)$.

(11.2) BEISPIELE: **a)** Ist K ein Körper, so ist die Menge $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ aller $(m \times n)$–Matrizen mit Elementen aus K nach (10.5) ein K–Vektorraum. Dabei sind m und n beliebige natürliche Zahlen. Also z.B.:

$\mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{Q})$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum

$\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum

$\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_7)$ ist ein $\mathbb{Z}_7$–Vektorraum.

b) Spezialfall von a): Der K–Vektorraum $K^m := \mathrm{M}_{m,1}(K)$ aller Spalten aus m Elementen von K. Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert. Etwa:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{–Vektorraum}$$

$$\mathbb{Q}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \right\} \text{ ist ein } \mathbb{Q}\text{–Vektorraum}$$

$$\mathbb{Z}_2^4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_2 \right\} \text{ ist ein } \mathbb{Z}_2\text{–Vektorraum}$$

c) Jeder Körper K ist ein K–Vektorraum:

$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $\mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum, $\mathbb{Z}_{13}$ ist ein $\mathbb{Z}_{13}$–Vektorraum

d) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum

e) Die Menge $\mathcal{F}(K)$ aller unendlichen Folgen von Elementen aus K ist ein K–Vektorraum. Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ werden "gliedweise" addiert, d.h.

$(a_n)_{n\in\mathrm{N}} + (b_n)_{n\in\mathrm{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathcal{F}(K)$ und $c \cdot (a_n)_{n\in\mathrm{N}} := (c \cdot a_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathcal{F}(K)$.

f) Die Vektoren der Ebene (bzw. des Raumes) bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(11.3) SATZ: K sei ein Körper. In einem K–Vektorraum V gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $\forall\, v \in V \,:\, o_K \cdot v \;=\; o_V$

b) $\forall\, a \in K \,:\, a \cdot o_V \;=\; o_V$

c) $\forall\, a \in K \,\forall\, v \in V \,:\, a \cdot v = o_V \iff (a = 0_K \;\vee\; v = o_V)$

d) $\forall\, v \in V \,:\, (-1_K) \cdot v \;=\; -v$.