(10.30) BEISPIEL: Wir wollen an einigen Beispielen das unterschiedliche Lösungsverhalten von linearen Gleichungsszstemen darstellen. Es sei A eine $(m \times n)$–Matrix über $\mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zur Lösung des LGS's $Ax = b$ bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) mit dem Gauß-Algorithmus auf Treppenform. Das Ergebnis ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(T(A), c)$ des Systems $T(A)x = c$, das nach (10.29) dieselbe Lösungsmenge wie das Ausgangssystem hat. Durch "Rückwärtseinsetzen" bestimmen wir dann die Lösungen, falls das System überhaupt lösbar ist.

a)

A				b
1	1	−1	0	1
2	1	1	−1	0
−1	0	−1	2	−1
2	2	−1	1	0
1	0	0	−3	3
0	1	0	4	−4
0	0	1	1	−2
0	0	0	0	0
$T(A)$				c

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 3+3r \\ -4-4r \\ -2-r \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$$

1 frei wählbarer Parameter

$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A, b)$

b)

A				b
1	1	−1	0	1
2	1	1	−1	0
−1	0	−1	2	−1
2	2	−1	1	1
1	0	0	3	0
0	1	0	−4	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	1
$T(A)$				c

$\text{Lös}(A,b) = \emptyset$ (**keine** Lösung)

$\text{rg}(A) = 3 \neq 4 = \text{rg}(A, b)$

c)

A					b
1	1	−1	0	1	2
2	1	1	−1	0	1
−1	0	−1	2	2	2
2	2	−1	1	3	5
1	0	0	−3	−3	−3
0	1	0	4	5	6
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0
$T(A)$					c

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} -3+3r+3s \\ 6-4r-5s \\ 1-r-s \\ r \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

2 frei wählbare Parameter

$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A, b)$

d)

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
\multicolumn{5}{c|}{A} & b \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\multicolumn{5}{c|}{T(A)} & c
\end{array}
$$

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} -3+3r+3s \\ 6-4r-5s \\ 1-r-s \\ r \\ s \end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

2 frei wählbare Parameter

$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A,b)$

$\text{rg}(A) =$ Zeilenzahl von A

e)

$$
\begin{array}{rrr|r}
\multicolumn{3}{c|}{A} & b \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2 \\
2 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{T(A)} & c
\end{array}
$$

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genau eine Lösung

kein frei wählbarer Parameter

$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A,b)$

$\text{rg}(A) =$ Spaltenzahl von A

f)

$$
\begin{array}{rrr|r}
\multicolumn{3}{c|}{A} & b \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{T(A)} & c
\end{array}
$$

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genau eine Lösung

kein frei wählbarer Parameter

$\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A,b)$

A ist **invertierbar**

$\text{rg}(A) =$ Zeilenzahl von A $=$ Spaltenzahl von A

(10.31) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Genau dann ist das LGS $Ax = b$ lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A,b)$ ist.

(10.32) FOLG: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Ist das LGS $Ax = b$ lösbar, so hängt jeder Lösungsvektor von $n - r$ frei wählbaren Parametern ab.

(10.33) FOLG: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$.

a) Gilt $\mathrm{rg}(A) = m$ (Zeilenzahl von A), so besitzt das LGS $Ax = b$ **mindestens** eine Lösung.

b) Gilt $\mathrm{rg}(A) = n$ (Spaltenzahl von A), so besitzt das LGS $Ax = b$ **höchstens** eine Lösung.

c) Gilt $\mathrm{rg}(A) = m = n$ (Zeilen– bzw. Spaltenzahl von A), so besitzt das LGS $Ax = b$ **genau** eine Lösung.

(10.34) FOLG: Ein **homogenes** LGS $Ax = o \in K^m$ besitzt immer eine Lösung, nämlich den Nullvektor aus K^n.

12.2.2001

(10.35) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$, und es sei $v_0 \in K^n$ eine Lösung des LGS's $Ax = b$. Dann gilt:

$$\mathrm{Lös}(A, b) \;=\; \{\, v_0 + w \mid w \in \mathrm{Lös}(A, o) \,\} \subseteq K^n$$

(10.36) BEM: In (10.35) nennt man $v_0 \in K^n$ eine **spezielle Lösung** des LGS's $Ax = b$. Die **allgemeine Lösung** v des LGS's $Ax = b$ läßt sich dann in der Form

$$v \;= v_0 + w$$

darstellen, wobei w eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS's $Ax = o$ ist.