Ein Beispiel zu (10.24)

In diesem Beispiel wird die Treppenform einer (4×6)–Matrix bestimmt. Die Vorgehensweise läßt sich leicht zu einem Beweis verallgemeinern und führt zu dem sog. **Gauß-Algorithmus**. Zu jeder elementaren Zeilenumformung, die wir vornehmen, notieren wir jeweils die zugehörige Elementarmatrix.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,6}(\mathbb{R}).$$

Wir suchen die erste Spalte von A, die nicht die Nullspalte ist. Dies ist hier die zweite (Spaltenindex $k_1 = 2$). Durch Vertauschen der ersten und der zweiten Zeile bringen wir ein Element $\neq 0$ auf die Position $(1, k_1)$, hier also $(1, 2)$. Diese Vertauschung wird durch Linksmultiplikation von A mit der (4×4)–Vertauschungsmatrix V_{12} bewirkt:

$$V_{12} \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann machen wir alle Elemente in der zweiten Spalte unterhalb von 1 zu 0, indem wir ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zu den anderen Zeilen addieren. Hier müssen wir das (-2)–fache der ersten Zeile zur dritten Zeile addieren $(A_{31}(-2))$

$$A_{31}(-2) \cdot V_{12} \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die nächste Spalte, bei der unterhalb der ersten Zeile ein Element $\neq 0$ vorkommt, ist die dritte Spalte $(k_2 = 3)$. Diese Spalte soll der 2–te Einheitsvektor werden. Dazu addieren wir die 2–te Zeile zur 1–ten, das (-2)– fache der 2–ten zur 3–ten und (-1)–fache der 2–ten Zeile zur 4–ten Zeile $(A_{12}(1), A_{32}(-2), A_{42}(-1))$ und erhalten:

$$A_{42}(-1) \cdot A_{32}(-2) \cdot A_{12}(1) \cdot A_{31}(-2) \cdot V_{12} \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die nächste Spalte, bei der unterhalb der zweiten Zeile ein Element $\neq 0$ vorkommt, ist die 5–te Spalte $(k_3 = 5)$. Diese Spalte soll der 3–te Einheitsvektor werden. Dazu addieren wir die 3–te Zeile zu den drei anderen $(A_{13}(1), A_{23}(1), A_{43}(1))$

$$A_{43}(1) \cdot A_{23}(1) \cdot A_{13}(1) \cdot A_{42}(-1) \cdot A_{32}(-2) \cdot A_{12}(1) \cdot A_{31}(-2) \cdot V_{12} \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir die 3–te Zeile mit -1 $(D_3(-1))$, so erhalten wir die gesuchte Treppenform:

$$\underbrace{(D_3(-1)\cdot A_{43}(1)\cdot A_{23}(1)\cdot A_{13}(1)\cdot A_{42}(-1)\cdot A_{32}(-2)\cdot A_{12}(1)\cdot A_{31}(-2)\cdot V_{12})}_{=:G}\cdot A \;=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; T(A).$$

Es ist also $T(A)$ eine Treppenmatrix vom Rang 3 mit den charakteristischen Spaltenindizes $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 5$. Da alle Elementarmatrizen nach (10.20) invertierbar sind, ist auch G als Produkt invertierbarer Matrizen nach (10.12b) wieder invertierbar. Damit existiert also ein $G \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$G \cdot A \;=\; T(A)$$

Für einen **allgemeinen Beweis** von (10.24) können wir Induktion nach der Anzahl m der Zeilen von A führen, wobei die Spaltenzahl n beliebig ist.

$m = 1:$ Sei $A = (a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}) \neq O$ eine $(1\times n)$–Matrix. Ist k_1 der Spaltenindex des ersten Elementes $\neq 0$, so ist $T(A) = (0\ldots 0\;1\;\;\star\ldots\star)$ die Treppenmatrix von A mit 1 an der Stelle $(1,k_1)$. Mit $G = (a_{1_1k}^{-1}) \in \mathrm{GL}_1(K)$ gilt dann $G\cdot A = T(A)$.

(IV) Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, und jede Matrix $B \neq O$ mit m Zeilen und beliebiger Spaltenzahl kann auf Treppenform gebracht werden. Außerdem gibt es eine Matrix $H \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit $H\cdot B = T(B)$.

(IB) Es muß gezeigt werden, daß jede Matrix $A \neq O$, die $m+1$ Zeilen hat, auf Treppenform transformiert werden kann und daß es $G \in \mathrm{GL}_{m+1}(K)$ gibt mit $G\cdot A = T(A)$.

Es sei k_1 der Index der ersten Spalte von A, in der ein Element $\neq 0$ vorkommt (**Pivotelement**, "pivot" (englisch): Dreh– oder Angelpunkt), die Zeile dieses Elementes habe den Index i_1 (diese Zeile heißt auch **Pivotzeile**). Durch Zeilenvertauschung kann dieses Pivotelement in die erste Zeile gebracht werden. Die Matrix $A^{(1)} := V_{1i_1}\cdot A = (a_{ik}^{(1)})$ hat dann das folgende Aussehen:

$$A^{(1)} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1}^{(1)} & \star & \ldots & \star \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2k_1}^{(1)} & \star & \ldots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1,k_1}^{(1)} & \star & \ldots & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,n}(K) \qquad \text{mit } a_{1k_1}^{(1)} \neq 0.$$

Alle Elemente der k_1–ten Spalte unterhalb der ersten Zeile werden jetzt zu Null gemacht. Das geschieht dadurch, daß ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zur i–ten Zeile addiert wird $(i = 2,3,\ldots,m+1)$. Das Ergebnis ist eine Matrix $A^{(2)} = (a_{ik}^{(2)})$, deren Elemente nach der folgenden Vorschrift aus den Elementen von $A^{(1)}$ gebildet werden: die erste Zeile bleibt erhalten, für $i \geq 2$ ist

$$a_{ik}^{(2)} \;=\; a_{ik}^{(1)} - \frac{a_{ik_1}^{(1)}}{a_{1k_1}^{(1)}}\cdot a_{1k}^{(1)} \qquad (i = 2,3,\ldots,m+1)$$

Dies wird durch Linksmultiplikation mit den Additionsmatrizen

$$A_{i1}\left(-\frac{a_{ik_1}^{(1)}}{a_{1k_1}^{(1)}}\right) \qquad (i = 2, 3, \ldots, m+1)$$

bewirkt. $A^{(2)}$ ist dann von folgender Form:

$$A^{(2)} \;=\; \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1}^{(2)} & & \star & \ldots & \star \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & & \star & \ldots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & B & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \star & \ldots & \star \end{array}\right)$$

Das Element an der Stelle $(1, k_1)$ kann durch Multiplikation der 1–ten Zeile mit $(a_{1k_1}^{(2)})^{-1}$ zu 1 gemacht werden, so daß die k_1–te Spalte der erste Einheitsvektor aus K^{m+1} ist. Nun ist B eine Matrix mit m Zeilen. Ist $B = O$, so haben wir die Treppenform von A gefunden, ist dagegen $B \neq O$, so kann B nach (IV) auf Treppenform gebracht werden. Dazu gehören charakteristische Spaltenindizes $k_2, \ldots, k_r$.

$$A^{(3)} \;=\; \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & \star & \ldots & \star \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \star & \ldots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & T(B) & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \star & \ldots & \star \end{array}\right)$$

Die Elemente in der ersten Zeile mit den Spaltenindizes $k_2, \ldots, k_r$ können zu 0 gemacht werden, so daß insgesamt die Treppenmatrix von A entstanden ist.

Man kann sich nun auch noch überlegen, daß die elementaren Zeilenumformungen, die mit B vorgenommen worden sind, durch Linksmultiplikation der gesamten Matrix mit Elementarmatrizen aus $\mathrm{GL}_{m+1}(K)$ bewirkt werden können. Dazu hat man die Elementarmatrizen $H' \in \mathrm{GL}_m(K)$, die zu den elementaren Zeilenumformungen von B gehören, jeweils um eine Zeile und Spalte in der folgenden Form zu vergrößern:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & H' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{m+1}(K)$$

Dadurch entsteht wieder eine Elementarmatrix. Insgesamt können wir damit A durch Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen aus $\mathrm{GL}_{m+1}(K)$ auf Treppenform bringen. Das Produkt dieser Elementarmatrizen liefert dann eine invertierbare Matrix $G \in \mathrm{GL}_{m+1}(K)$ mit der Eigenschaft

$$G \cdot A \;=\; T(A)$$

□

(10.25) Der Gauß-Algorithmus

Aus dem obigen Beispiel und dem Beweis des Satzes (10.24) resultiert ein Algorithmus zur Berechnung der Treppenmatrix einer Matrix A, der sog. **Gauß-Algorithmus**.

(10.26) DEF: Eine $(m \times n)$–Matrix $A \neq O$ über K besitzt den **Rang** r (in Zeichen: $\mathrm{rg}(A) = r$), wenn die zugehörige Treppenmatrix $T(A)$ eine Treppenmatrix vom Rang r ist. Die Nullmatrix soll den Rang 0 besitzen.

Beispiel: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechne: $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Also ist $T(A)$ eine Treppenmatrix vom Rang 3 (die charakteristischen Spaltenindizes sind $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$), damit ist A eine Matrix vom Rang 3, d.h. $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Wir wollen jetzt den Gauß-Algorithmus auch dazu verwenden, das Inverse einer invertierbaren Matrix zu berechnen. Zunächst beweisen wir:

(10.27) SATZ: Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar

b) $\mathrm{rg}(A) = n$

c) $T(A) = E_n$

d) A läßt sich als ein Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Bew: Wir führen einen Ringschluß $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d) \Longrightarrow a)$ durch. □

(10.28) Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix

Ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare $(n \times n)$–Matrix, so läßt sich A durch elementare Zeilenumformungen auf die Treppenform $T(A) = E_n$ bringen (s. (10.27)). Diese definieren eine invertierbare Matrix G mit

$$G \cdot A \;=\; T(A) \;=\; E_n$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit A^{-1}, so erhält man

$G = GE_n = G(AA^{-1}) = \underline{(GA)A^{-1} = E_nA^{-1}} = A^{-1}$ und damit

$$G \cdot E_n = A^{-1}$$

Nehmen wir also dieselben elementaren Zeilenumformungen, die A auf Treppenform bringen, mit der Einheitsmatrix E_n vor, so erhalten wir die inverse Matrix A^{-1}.

Beispiel: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

Um das obige Verfahren anzuwenden, muß nicht vorher bekannt sein, daß A invertierbar ist. Bei der Transformation auf Treppenform wird der Rang von A bestimmt. Wenn dieser 3 ist, wissen wir, daß A invertierbar ist, und haben dann das Inverse von A bestimmt.

El. matrix	A			E_3		
	1	0	1	1	0	0
$A_{21}(-1)$	1	0	2	0	1	0
	0	1	0	0	0	1
	1	0	1	1	0	0
V_{23}	0	0	1	-1	1	0
	0	1	0	0	0	1
	1	0	1	1	0	0
$A_{13}(-1)$	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	-1	1	0
	1	0	0	2	-1	0
	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	-1	1	0
	$T(A) = E_3$			A^{-1}		

Folglich $(A_{13}(-1) \cdot V_{23} \cdot A_{21}(-1)) \cdot A = T(A) = E_3$.
Wegen $T(A) = E_3$ ist A überhaupt erst einmal invertierbar. Für

$$B := A_{13}(-1) \cdot V_{23} \cdot A_{21}(-1)$$

gilt dann $B \cdot A = E_3$, und man rechnet nach: $A \cdot B = E_3$. Damit ist $B = A^{-1}$ die inverse Matrix von A.

Anwendung auf LGS'e

(10.29) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Es sei $G \in \mathrm{GL}_m(K)$ eine invertierbare Matrix mit $G \cdot A = T(A)$. Dann haben die LGS'e (1) $Ax = b$ und (2) $T(A)x = Gb$ dieselben Lösungsmengen.

Bew: Klar nach (10.22).

Zur Lösung eines LGS's $Ax = b$ werden wir also die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, b) \in \mathrm{M}_{m,n+1}(K)$ auf Treppenform transformieren. Dabei wird sich herausstellen, ob das LGS überhaupt lösbar ist.

(10.30) BEISPIEL:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Wir wollen versuchen, die LGS'e $Ax = b$ und $Ax = b'$ zu lösen. Dazu bringen wir die beiden erweiterten Koeffizientenmatrizen (A, b) und (A, b') auf Treppenform. Dies können wir in einem Rechenverfahren durchführen. Wir erhalten:

$T(A)$				c	c'
1	0	0	-3	3	0
0	1	0	4	-4	0
0	0	1	1	-2	0
0	0	0	0	0	1

Wir lesen ab: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A,b) = 3$, aber $\mathrm{rg}(A,b') = 4$. Wie wir gleich sehen werden, ergibt sich hieraus, daß das LGS $Ax = b$ lösbar, das LGS $Ax = b'$ dagegen nicht lösbar ist.

Das LGS $T(A)x = c$ hat die Lösungsmenge

$$\mathrm{Lös}(T(A),c) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 3+3r \\ -4-4r \\ -2-r \\ r \end{pmatrix} \middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösung ist von einem frei wählbaren Parameter r abhängig, der alle reellen Zahlen durchlaufen kann. Es gibt insbesondere unendlich viele Lösungen. Außerdem gilt

$$\mathrm{Lös}(A,b) \;=\; \mathrm{Lös}(T(A),c)$$

Das LGS $T(A)x = c'$ hat **keine** Lösung, d.h.

$$\mathrm{Lös}(A,b') \;=\; \mathrm{Lös}(T(A),c') \;=\; \emptyset$$

Allgemein werden wir beweisen:

(10.31) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Genau dann ist das LGS $Ax = b$ lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A,b)$ ist.