Beispiele für Elementarmatrizen in $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$:

$$V_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{23}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_3(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(10.19) SATZ: Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von links bewirkt eine sog. **elementare Zeilenumformung**. Im einzelnen gilt:

$V_{ik} \cdot A$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Zeile von A
$A_{ik}(a) \cdot A$	Addition des a–fachen der k–ten Zeile von A zur i–ten Zeile von A
$D_i(a) \cdot A$	Multiplikation der i–ten Zeile von A mit $a \neq 0$

Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von rechts bewirkt eine **elementare Spaltenumformung**. Im einzelnen gilt:

$A \cdot V_{ik}$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Spalte von A
$A \cdot A_{ik}(a)$	Addition des a–fachen der i–ten Spalte von A zur k–ten Spalte von A
$A \cdot D_i(a)$	Multiplikation der i–ten Spalte von A mit $a \neq 0$

(10.20) SATZ: Eine Elementarmatrix aus $\mathrm{M}_n(K)$ ist invertierbar. Ihr Inverses ist wieder eine Elementarmatrix.

Es gilt: $V_{ik}^{-1} = V_{ik}$, $A_{ik}(a)^{-1} = A_{ik}(-a)$, $D_i(a)^{-1} = D_i(a^{-1})$.

§10 c) Lineare Gleichungssysteme

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Setze $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

A ist also eine (3×3)–Matrix, b und x sind (Spalten–) Vektoren mit jeweils 3 Komponenten. Auf Grund der Definition der Matrizenmultiplikation und der Gleichheit von Matrizen gilt dann

$$A \cdot x = b \iff \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

d.h. wir können das lineare Gleichungssystem $(\star)$ auch in der Form

$$A \cdot x \;=\; b$$

darstellen. Allgemein führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

(10.21) BEZEICHNUNGEN:

Es sei K ein Körper. Ein System von Gleichungen der Form

$$(\star) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 \;+ a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 \;+ a_{22}x_2 + \ldots + \; a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

mit $a_{ik} \in K$ und $b_i \in K$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ heißt ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** über K bestehend aus m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die $(m \times n)$–Matrix $\qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$

heißt die **Koeffizientenmatrix** von $(\star)$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt der Vektor der Unbekannten, $\qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ der Vektor der rechten Seite von $(\star)$.

$(A, b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n+1}(K)$

heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** von $(\star)$.

$(\star\star) \quad A \cdot x \;=\; b \qquad$ **LGS in Matrizenform**

Ein Vektor $v \in K^n$ heißt eine **Lösung** von $(\star)$, wenn $A \cdot v = b$ gilt.

$\text{Lös}(A, b) = \{\, v \mid v \in K^n \,,\; A \cdot v = b \,\} \subseteq K^n \quad$ heißt die **Lösungsmenge** von $(\star)$.

Ein LGS $A \cdot x = b$ heißt **homogen**, wenn b der Nullvektor aus K^m ist, sonst **inhomogen**.

(10.22) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$.

a) Für jede invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}_m(K)$ haben die beiden linearen Gleichungssysteme

$$(1) \quad A \cdot x = b \qquad \text{und} \qquad (2) \quad (B \cdot A) \cdot x = B \cdot b$$

dieselbe Lösungsmenge.

b) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (1) $A \cdot x = b$ ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b).

Zu **b)** : Eine elementare Zeilenumformung wird durch Linksmultiplikation mit einer Elementarmatrix bewirkt. Diese sind invertierbar, so daß die Behauptung aus a) folgt.

Strategie zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$:

Durch elementare Zeilenumformungen wird das Gleichungssystem auf eine Form gebracht, aus der sich die Lösungen leichter berechnen lassen. Bei diesen elementaren Zeilenumformungen ändert sich nicht die Lösungsmenge (Gauß-Algorithmus)

Als Hilfsmittel für die Behandlung linearer Gleichungssysteme benötigen wir den Begriff einer **Treppenmatrix**. Zunächst ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{6,11}(\mathbb{R})$$

Unterhalb der eingezeichneten Treppenlinie sind alle Elemente der Matrix A gleich 0. Die Spalten mit den Indizes $k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 7, k_4 = 9, k_5 = 11$ sind die sog. **Einheitsvektoren** aus dem K^6. Der i–te Einheitsvektor hat an der Stelle mit dem Index i eine 1 und sonst lauter 0'en. Zwischen der ersten und dem zweiten Einheitsvektor können nur in der ersten Zeile von Null verschiedene Elemente vorkommen, zwischen dem zweiten und dritten nur in den 2 obersten Zeilen usw.

(10.23) DEF: Eine $(m \times n)$–Matrix $T \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ der Form :

$$T = \begin{pmatrix}
0\ldots0 & 1 & \star\ldots\star & 0 & \star\ldots\star & 0 & \star & & \star & 0 & \star\ldots\star \\
0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & \star\ldots\star & 0 & \star & & \star & 0 & \star\ldots\star \\
0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & \star & & \star & 0 & \star\ldots\star \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & 0 & & \star & 0 & \star\ldots\star \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \star & 0 & \star\ldots\star \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & 1 & \star\ldots\star \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & 0 & \ldots\ 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & & \ldots & \ldots & 0 & \ldots\ 0
\end{pmatrix}$$

$$k_1 \qquad k_2 \qquad k_3 \qquad\qquad k_r$$

heißt eine $(m \times n)$–**Treppenmatrix vom Rang** r (hierbei steht $\star$ für beliebige Elemente aus K). Die Spaltenindizes $k_1, k_2, \ldots, k_r$ mit $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_r \leq n$ mit der Eigenschaft, daß die k_i–te Spalte von T gerade der i–te Einheitsvektor aus K^m ist, heißen die **charakteristischen Spaltenindizes** von T.

(10.24) SATZ: Zu jeder $(m \times n)$–Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ $(A \neq O)$ gibt es eine invertierbare Matrix $G \in \mathrm{GL}_m(K)$, so daß die Matrix

$$G \cdot A = T(A)$$

eine Treppenmatrix ist. Die Matrix $T(A)$ ist durch A eindeutig bestimmt und heißt die **zu** A **gehörige Treppenmatrix**.

Bew: Durch elementare Zeilenumformungen kann A auf Treppenform transformiert werden. Jeder elementaren Zeilenumformung entspricht eine Linksmultiplikation mit einer Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $G_1, G_2, \ldots, G_s \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit der Eigenschaft

$$\underbrace{(G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s)}_{=G} \cdot A = T ,$$

wobei T eine Treppenmatrix ist. Nach (10.12b) ist das Produkt invertierbarere Matrizen wieder invertierbar, d.h. $G \in \mathrm{GL}_m(K)$.

Man kann zeigen: Sind $T, T' \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ Treppenmatrizen und gibt es invertierbare Matrizen $G, G' \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit den Eigenschaften

$$G \cdot A = T \quad \text{und} \quad G' \cdot A = T' ,$$

so folgt $T = T'$. Damit ist die Treppenmatrix T eindeutig durch A bestimmt. Sie wird mit $T(A)$ bezeichnet.