e) Ein Beispiel zur Matrizenmultiplikation

Ein Betrieb stellt aus den beiden Rohstoffen R_1 und R_2 die Halbprodukte H_1, H_2, H_3 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2. Der dafür benötigte Materialverbrauch (in Mengeneinheiten) ist durch die folgenden Tabellen gegeben:

(1)

	H_1	H_2	H_3
R_1	2	1	6
R_2	4	1	3

(2)

	E_1	E_2
H_1	2	3
H_2	7	9
H_3	4	5

Frage: Wieviel Rohstoffe werden zur Herstellung der Endprodukte benötigt?

Der Bedarf an R_1 für die Herstellung von E_1 berechnet sich folgendermaßen: Nach (2) wird für E_1 benötigt: $2H_1 + 7H_2 + 4H_3$. Der Bedarf an R_1 für die einzelnen Halbprodukte ergibt sich aus (1):

$$2(2R_1) + 7(1R_1) + 4(6R_1) =$$
$$(2 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 6)R_1 = 35\,R_1$$

Bedarf von R_2 für E_1: Zunächst $2H_1 + 7H_2 + 4H_3$ und damit:

$$2(4R_2) + 1(1R_2) + 4(3R_2) =$$
$$(2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3)R_2 = 27\,R_2$$

Entsprechend: $45R_1$ für E_2 und $36R_2$ für E_2. Als Tabelle geschrieben:

(3)

	E_1	E_2
R_1	35	45
R_2	27	36

Mathematische Interpretation:

Tabelle (1) liefert die (2×3)–Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Tabelle (2) liefert die (3×2)–Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Die (2×2)–Matrix C, die zur Tabelle (3) gehört, ist dann gerade das **Matrizenprodukt** $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 6 \cdot 4 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 35 & 45 \\ 27 & 36 \end{pmatrix} = C$$

(10.9) SATZ: **a)** Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ.

b) Die Matrizenmultiplikation ist i.a. **nicht** kommutativ.

c) Es gelten die Distributiv–Gesetze für die Addition und Multiplikation von Matrizen.

d) Für $c \in K$ gilt $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

e) Es gilt $E_m \cdot B = B \quad \forall\, B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$

Es gilt $A \cdot E_n = A \quad \forall\, A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$

(10.10) BEM: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) $(\mathrm{M}_n(K), +, \cdot)$ ist ein (nichtkommutativer) Ring.

b) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Die m–te Potenz A^m einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist rekursiv definiert durch $A^0 := E_n$, $A^{m+1} := A^m \cdot A$.

(10.11) DEF: Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ gibt mit

$$A \cdot B \;=\; E_n \;=\; B \cdot A$$

B heißt dann die zu A **inverse Matrix** und wird mit A^{-1} bezeichnet.

$\mathrm{GL}_n(K)$ bezeichnet die Menge aller invertierbaren $(n \times n)$–Matrizen aus $\mathrm{M}_n(K)$ ("GL" kommt von "General Linear Group").

Beispiele: $E_2 \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ist invertierbar , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ist nicht invertierbar

Probleme: **1)** Wie stellt man fest, ob eine Matrix invertierbar ist?

2) Wie berechnet man das Inverse einer invertierbaren Matrix?

(10.12) SATZ: Für $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ **b)** $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(10.13) DEF: **a)** Sei $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ k=1,2,\ldots,n}}$ eine $(m \times n)$–Matrix über K. Dann heißt die $(n \times m)$–Matrix ${}^tA := (b_{jl})_{\substack{j=1,2,\ldots,n \\ l=1,2,\ldots,m}}$ mit $b_{jl} := a_{lj}$ die **zu** A **transponierte Matrix**.

b) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = {}^tA$ gilt, und **antisymmetrisch**, wenn $A = -{}^tA$ gilt.

(10.14) SATZ: Folgende Aussagen sind richtig:

a) $\forall\, A \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \;:\; {}^t({}^tA) \;=\; A$

b) $\forall\, A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \;:\; {}^t(A + B) \;=\; {}^tA + {}^tB$

c) $\forall\, c \in K \;\forall\, A \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \;:\; {}^t(c \cdot A) \;=\; c \cdot {}^tA$

d) $\forall\, A \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \;\forall\, B \in \mathrm{M}_{np}(K) \;:\; {}^t(A \cdot B) \;=\; {}^tB \cdot {}^tA$.

e) $\forall\, A \in \mathrm{GL}_n(K) \;:\; {}^tA \in \mathrm{GL}_n(K) \;\wedge\; ({}^tA)^{-1} \;=\; {}^t(A^{-1})$

(10.15) DEF: Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ eine quadratische Matrix.

a) A heißt **(strikt) obere Dreiecksmatrix**, wenn gilt:

$a_{ik} = 0$ für alle $i > k$ (bzw. $a_{ik} = 0$ für alle $i \geq k$.

Analog: **(Strikt) untere Dreiecksmatrix**.

b) A heißt **Diagonalmatrix**, wenn gilt $a_{ik} = 0$ für alle $i \neq k$.
Bezeichnung: $A = \mathrm{Diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Für die Beschreibung des Gauß-Algorithmus benötigen wir spezielle Matrizen, sog. **Basismatrizen**. Diese Matrizen haben an genau einer Stelle eine 1 und sonst lauter Nullen.

(10.16) DEF: Seien $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq m$ und $1 \leq s \leq n$. Dann heißt die Matrix

$$E_{rs} = (\delta_{ir}\delta_{sk})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ k=1,2,\ldots,n}} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$$

eine $(m \times n)$–**Basismatrix**.

(10.17) BEM: **a)** Die Matrix E_{rs} hat an der Stelle (r, s) eine 1 und sonst lauter Nullen.

$$E_{rs} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \vdots & \end{pmatrix} \longleftarrow r\text{–te Zeile}$$

$\uparrow$ s–te Spalte.

b) $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \implies A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}E_{ik}$

c) $E_{rs} \cdot E_{tu} = \delta_{st}E_{ru} = \begin{cases} O & \text{für } s \neq t \\ E_{ru} & \text{für } s = t \end{cases}$

d) $E_{rs} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $A \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$

$E_{rs} \cdot A =$

$$r \rightarrow \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ a_{s1} & \ldots & a_{sp} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow r\text{–te Zeile.}$$

$\uparrow$ s–te Spalte

(d.h. $E_{rs} \cdot A$ hat die s–Zeile von A als r–te Zeile).

e) Analog hat die Produktmatrix $A \cdot E_{rs}$ die r–te Spalte von A als s–te Spalte und sonst lauter Nullen.

(10.18) DEF: Elementarmatrizen

Seien $i, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i, k \leq n$ und $i \neq k$.

a) Die Matrix $V_{ik} := E_n - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki} \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **Vertauschungsmatrix**.

b) Für $a \in K$ heißt $A_{ik}(a) := E_n + aE_{ik} \in \mathrm{M}_n(K)$ **Additionsmatrix**.

c) Für $a \in K, \underline{a \neq 0}$ heißt $D_i(a) := E_n + (a-1)E_{ii} \in \mathrm{M}_n(K)$ **Multiplikationsmatrix**.

d) Eine **Elementarmatrix** in $\mathrm{M}_n(K)$ ist eine der in a) bis c) definierten Matrizen.

2.2.2001

(10.19) SATZ: Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von links bewirkt eine sog. **elementare Zeilenumformung**. Im einzelnen gilt:

$V_{ik} \cdot A$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Zeile von A
$A_{ik}(a) \cdot A$	Addition des a–fachen der k–ten Zeile von A zur i–ten Zeile von A
$D_i(a) \cdot A$	Multiplikation der i–ten Zeile von A mit $a \neq 0$

Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von rechts bewirkt eine **elementare Spaltenumformung**. Im einzelnen gilt:

$A \cdot V_{ik}$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Spalte von A
$A \cdot A_{ik}(a)$	Addition des a–fachen der i–ten Spalte von A zur k–ten Spalte von A
$A \cdot D_i(a)$	Multiplikation der i–ten Spalte von A mit $a \neq 0$

(10.20) SATZ: Eine Elementarmatrix aus $\mathrm{M}_n(K)$ ist invertierbar. Ihr Inverses ist wieder eine Elementarmatrix.

Es gilt: $V_{ik}^{-1} = V_{ik}$, $A_{ik}(a)^{-1} = A_{ik}(-a)$, $D_i(a)^{-1} = D_i(a^{-1})$.