Chr. Nelius, Mathematik für Informatiker I, (WS 2000/01) *22.1.2001*

Lineare Gleichungssysteme

Einfache Beipiele

Geometrische Interpretation

Vorläufige Aussagen über die Lösungsmenge: es gibt keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen bei einem LGS über $\mathbb{R}$.

Gleichungssysteme in "Dreiecksform", Berechnung der Lösungen

Idee des Gauß-Algorithmus

Beschreibung von Gleichungssystemen durch Matrizen und Gauß-Algorithmus:

Durch Addition bzw. Subtraktion von Gleichungen bringen wir das LGS $(\star)$ auf Dreiecksform:

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
 & (1) & x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\
(\star) & (2) & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\
 & (3) & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\
\hline
\multicolumn{2}{r|}{(1) = (a)} & x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\
\multicolumn{2}{r|}{(2) + (1) = (b)} & & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \\
\multicolumn{2}{r|}{(3) - (1) = (c)} & & & -3x_2 & + & x_3 & = & -6 \\
\hline
\multicolumn{2}{r|}{(a) = (\alpha)} & x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\
\multicolumn{2}{r|}{(b) = (\beta)} & & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \\
\multicolumn{2}{r|}{(b) + (c) = (\gamma)} & & & & & -x_3 & = & 3
\end{array}
$$

Sukzessives Berechnen der Lösungen (unten beginnend):

$$
\begin{array}{ll}
(\gamma): & x_3 = -3 \\
(\beta): & x_2 = \frac{1}{3}(9 + 2x_3) = 1 \\
(\alpha): & x_1 = 3 - 2x_2 = 1
\end{array}
$$

Setzen wir diese Werte in das ursprüngliche LGS $(\star)$ ein, so stellen wir fest, daß wir eine Lösung von $(\star)$ gefunden haben:

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
 & (1) & 1 & + & 2 \cdot 1 & & & = & 3 \\
(\star) & (2) & -1 & + & 1 & - & 2 \cdot (-3) & = & 6 \\
 & (3) & 1 & - & 1 & + & (-3) & = & -3
\end{array}
$$

Bei den obigen Umformungen rechnet man im Grunde genommen nur mit den Koeffizienten. Wir vereinfachen daher die Schreibweise in folgender Form:

$$\begin{array}{c|rrr|r}
(1') & 1 & 2 & 0 & 3 \\
(2') & -1 & 1 & -2 & 6 \\
(3') & 1 & -1 & 1 & -3
\end{array}$$

Aus der Position eines Koeffizienten geht eindeutig hervor, mit welcher Unbekannten er multipliziert werden muß . Wir nehmen jetzt mit den Zeilen dieselben Umformungen wie mit den Gleichungen vor:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
(1') = (a') & 1 & 2 & 0 & 3 \\
(2') + (1') = (b') & 0 & 3 & -2 & 9 \\
(3') - (1') = (c') & 0 & -3 & 1 & -6 \\
\hline
(a') = (\alpha') & 1 & 2 & 0 & 3 \\
(b') = (\beta') & 0 & 3 & -2 & 9 \\
(b') + (c') = (\gamma') & 0 & 0 & -1 & 3
\end{array}$$

Hierbei haben wir die Zeilen "komponentenweise" addiert, d.h. die Komponenten an entsprechenden Stellen wurden addiert.

Dem letzten Schema entspricht das obige Gleichungssystem mit den Gleichungen $(\alpha), (\beta)$ und (γ).

Wir werden ein lineares Gleichungssystem in Zukunft auch nur durch die relevanten Größen beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht links das "Produkt" aus der "Koeffizientenmatrix" und der "Spalte der Unbekannten", auf der anderen Seite steht der "Vektor der rechten Seite".

Das Produkt werden wir so definieren, daß das Ergebnis gerade die linke Seite des linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da zwei 3–Tupel genau dann gleich sind, wenn alle ihre Komponenten an entsprechenden Stellen übereinstimmen, bedeutet die letzte Gleichheit gerade:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\
-x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3
\end{array}$$

d.h. wir haben unser altes Gleichungssystem wiedergefunden.