(8.12) DEF: Es sei M eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}$. Eine k–**Kombination von (Elementen aus)** M **mit Wiederholung** ist eine k–elementige Multimenge aus Elementen von M.

(8.13) SATZ: Für die Anzahl $C_w(n,k)$ der k–Kombinationen von n Elementen mit Wiederholung gilt

$$C_w(n,k) \;=\; \binom{n+k-1}{k}$$

Denk–Vorstellungen

k–Permutation von n Elementen ($k \leq n$):

(1) Aus einer Urne mit n verschiedenen Objekten wird k-mal ein Objekt gezogen (und nicht wieder zurückgelegt). Dabei wird die Reihenfolge der Ziehungen notiert.

(2) k verschiedene Objekte werden in n verschiedene Fächer verteilt, wobei in jedes Fach höchstens ein Objekt gelegt wird. Jede solche Verteilung kann als k–Permutation der n Fächer aufgefaßt werden.

k–Permutation mit Wiederholung von n Elementen ($k \in \mathbb{N}$):

(1) Die gezogenen Elemente werden wieder zurückgelegt.

(2) Die Einschränkung "höchstens ein Element" wird fallengelassen.

Beispiele:

- Wörter einer Sprache
- Zahldarstellungen im Dezimalsystem
- Toto–Tips

k–Kombination von n Elementen ($k \leq n$):

(1) Aus einer Urne mit n verschiedenen Objekten wird k-mal ein Objekt gezogen (und nicht wieder zurückgelegt). Dabei ist die Reihenfolge der Ziehungen bedeutungslos.

Beispiele:

- Tips beim Zahlenlotto
- Blattverteilungen beim Skat
- Anzahl der Binärfolgen der Länge n, in denen an genau k Stellen eine 1 steht

k–Kombination mit Wiederholung von n Elementen ($k \in \mathbb{N}$):

(1) Aus einer Urne mit n Objekten wird k–mal ein Objekt gezogen. Dabei wird ein gezogenes Objekt wieder zurückgelegt, und man notiert dabei, wie oft ein Objekt gezogen wurde.

(2) Es sind n Typen von Objekten gegeben (dies entspricht den Elementen von M). Eine k–Kombination mit Wiederholung gibt an, wieviel Stück von jedem Typ (insgesamt k) gewählt werden.

Das Zählen von Abbildungen

(8.14) SATZ: M und N seien nichtleere Mengen mit $|M| = k$ und $|N| = n$. Dann gilt:

a) Es gibt n^k Abbildungen $M \longrightarrow N$ (8.9a)

b) Es gibt $P(n,k)$ injektive Abbildungen $M \longrightarrow N$ (8.9b)

c) Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen $M \longrightarrow N$ (8.9c) mit $k = n$

d) Es gibt $S(k,n) \cdot n!$ surjektive Abbildungen $M \longrightarrow N$, wobei $S(k,n)$ die Anzahl der n–Zerlegungen einer k–elementigen Menge ist. $S(k,n)$ heißt **Stirling–Zahl 2. Art**.