Die $<$–Beziehung auf $\mathbb{R}$

(1.7) DEF: Für $x, y \in \mathbb{R}$ bedeute $\underline{x < y}$ (echt kleiner), daß $x \leq y$ und $x \neq y$ gilt. Man schreibt dafür auch $y > x$ (echt größer) .

(1.8) SATZ: **a)** Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $x < y \implies x + z < y + z$

ii) $x < y$ und $z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$

iii) $x < y$ und $y < z \implies x < z$

b) Für je zwei reelle Zahlen x, y gilt genau einer der drei Fälle:

$$x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } x > y \ .$$

floor und ceiling

(1.10) SATZ: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl m mit $m \leq x < m + 1$. $m =: \lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$ und heißt **floor von x**.

$\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, $\lfloor -3 \rfloor = -3$

(1.11) SATZ: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl n mit $n - 1 < x \leq n$. $n =: \lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl $\geq x$ und heißt **ceiling von x**.

$\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil -0.5 \rceil = 0$, $\lceil -3 \rceil = -3$

(1.12) BEM: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $m = \lfloor x \rfloor \iff m \leq x < m + 1$

b) $n = \lceil x \rceil \iff n - 1 < x \leq n$.