§8. Elementare Kombinatorik

Wir wollen hier einfache Abzählverfahren für die Elemente einer endlichen Menge behandeln, die durch bestimmte Eigenschaften definiert sind.

Wir unterscheiden Permutationen und Kombinationen.

Permutation: geordnete Auswahl von k Elementen aus einer n–elementigen Menge

(1) ohne Wiederholung

(2) mit Wiederholung

Kombination: ungeordnete Auswahl von k Elementen aus einer n–elementigen Menge

(3) ohne Wiederholung

(4) mit Wiederholung

Beispiele: **(1)** Wieviele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Bücher in ein Fach eines Bücherregals zu stellen ?

(2) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 4 Buchstaben Wörter der Länge 3 mit paarweise verschiedenen Buchstaben zu bilden ?

(3) Wie groß ist die Anzahl der Lotto–Tipreihen beim Spiel 6 aus 49 ?

(4) Wieviele Farbverteilungen gibt es, wenn aus einer Kiste mit je 10 blauen, grünen,roten, schwarzen und weißen Kugeln 6 Kugeln herausgenommen werden ?

Permutationen

(8.1) DEF: Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Eine **Permutation von (Elementen aus)** M ist ein n–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n$, das aus paarweise verschiedenen Elementen aus M besteht.

Eine Permutation von M ist also eine Umordnung der Elemente von M.

(8.2) SATZ: Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so gibt es $n\,!$ Permutationen von M.

(8.3) Beispiel: Wie viele verschiedene Wörter lassen sich aus den Buchstaben A, A, A, B, B, C, C bilden?

(8.4) SATZ: Die Anzahl der Permutationen einer **Multimenge** $M = \{\{x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_r\}\}$, in der das Element x_i genau k_i–mal vorkommt $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ist gleich dem **Multinomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

wobei $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ ist.

(8.5) DEF: Sei M eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $1 \leq k \leq n$. Eine k–**Permutation von (Elementen aus)** M ist ein k–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in M^k$, das aus paarweise verschiedenen Elementen aus M besteht.

Eine n–Permutation ist gerade eine Permutation von M .

(8.6) SATZ: Die Anzahl $P(n,k)$ $(1 \leq k \leq n)$ aller k–Permutationen einer n–elementigen Menge ist

$$P(n,k) \;=\; n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Die Anzahl aller Permutationen einer Menge mit n Elementen ist gleich $n!$. (s. (8.2)).

(8.7) DEF: Ein k–Tupel aus M^k heißt auch eine k–**Permutation mit Wiederholung von (Elementen aus)** M

(8.8) SATZ: Sei $k \in \mathbb{N}$ beleibig. Die Anzahl $P_w(n,k)$ der k–Permutationen mit Wiederholung einer n–elementigen Menge ist gleich n^k.

(8.9) BEM: Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Jedes k–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in M^k$ definiert dann eine Abbildung

$$f : \{1,2,3,\ldots,k\} \longrightarrow M \quad , \quad f(i) := x_i \quad (\forall\, i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$$

a) Die Anzahl aller Abbildungen einer k–elementigen Menge in eine n–elementigen Menge ist daher n^k.

b) Ist $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine k–Permutation, so muß $k \leq n$ gelten, und die zugehörige Abbildung ist injektiv. Daher ist $P(n,k)$ auch die Anzahl aller injektiven Abbildungen einer k–elementigen Menge in eine n–elementige Menge.

c) Im Falle $k = n$ ist eine injektive Abbildung $f : \{1,2,3,\ldots,k\} \longrightarrow M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ auch bijektiv (s. Aufgabe 32d)), d.h. $P(n,n) = n!$ ist die Anzahl aller bijektiven Abbildungen einer n–elementigen Menge in eine n–elementige Menge.

Kombinationen

Bei einer Permutation ist die Reihenfolge der ausgewählten Objekte relevant, bei einer Kombination nicht mehr.

(8.10) DEF: Sei M eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $1 \leq k \leq n$. Eine k–**Kombination von (Elementen aus)** M ist eine k–elementige Teilmenge von M.

(8.11) SATZ: Für die Anzahl $C(n,k)$ der k–Kombinationen von n Elementen gilt

$$C(n,k) \;=\; \binom{n}{k}$$