(7.5) SATZ: Jede nichtleere endliche Menge T natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element und ein größtes Element.

Bew: Vollständige Induktion nach $|T| =: n \in \mathbb{N}$
Wir zeigen die Existenz eines kleinsten Elementes. Der andere Fall wird analog bewiesen.
(IA) $\underline{n = 1:}$ $T = \{x_1\}$. Dann ist x_1 ist kleinstes Element von T .
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und die Behauptung richtig für n:
(IB) Jede $(n+1)$-elementige Teilmenge T von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.
Sei $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Die Teilmenge $T' := \{x_1, \ldots, x_n\}$ hat dann n Elemente und besitzt nach (IV) ein kleinstes Element $x_j \in T'$, d.h.: $x_j \leq x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
1. Fall: $x_j \leq x_{n+1}$. Dann ist x_j kleinstes Element von T.
2. Fall: $x_{n+1} \leq x_j \implies x_{n+1} \leq x_i \;\; \forall\, i = 1, \cdots, n \implies x_{n+1}$ ist kleinstes Element von T. □

Wir können jetzt eine Formel beweisen, die wir früher einmal vermutet haben:

(7.6) SATZ: Für jede endliche Menge M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Bew: Induktion nach $n := |M| \in \mathbb{N}_0$: **(IA)** $\underline{n = 0}$: $|M| = 0 \implies M = \emptyset \implies \mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$, also $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und die Behauptung richtig für alle endlichen Mengen mit n Elementen.
Sei M eine Menge mit $n+1$ Elementen. Zz: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$
Sei $x_0 \in M$ fest. Setze $N := M \setminus \{x_0\}$. Dann gilt $|N| = n$ und $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$ nach (IV).
Für eine beliebige Teilmenge $U \subseteq M$ gilt entweder 1) $x_0 \notin U$ oder 2) $x_0 \in U$

1) $x_0 \notin U \implies U \subseteq N$, d.h. $U \in \mathcal{P}(N)$. Nach (IV) gibt es 2^n Möglichkeiten für U.

2) $U = (U \setminus \{x_0\}) \,\dot\cup\, \{x_0\} = V \,\dot\cup\, \{x_0\}$ mit $V \in \mathcal{P}(N)$. Nach (IV) gibt es 2^n Möglichkeiten für V und damit auch für U .

Insgesamt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ □

Ist $M = \{1, 2, 3, 4\}$, so gibt es insgesamt $2^4 = 16$ Teilmengen von M. Diese Teilmengen können $0, 1, 2, 3$ oder 4 Elemente haben.

Sei $\mathcal{P}_k(M) = \{U | U \subseteq M, \; |U| = k\}$ für eine endliche Menge M.

$k = 0:$	$\emptyset$	1
$k = 1:$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	4
$k = 2:$	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$	6
$k = 3:$	$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$	4
$k = 4:$	M	1
		16

Um diese Zahlen formelmäßig bestimmen zu können, führen wir die Binomialkoeffizienten ein:

(7.7) DEF: Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ heißt die Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Binomialkoeffizient n über k.

Für $0 \leq k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \overbrace{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}^{(n-k)!}}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist auch für $k > n$ definiert und ergibt 0, da im Zähler 0 als Faktor auftritt.

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 210$$

(7.8) BEM: **a)** Für $0 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$.

$\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$, insgesamt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$

b) $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$ für $n \geq 1$.

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$

Bew: $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ $\square$

d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ $\quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$

Bew: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} =$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \quad \square$$

e) Die in d) angegebene rekursive Formel ist Grundlage für das sogenannte Pascal'sche Dreieck, mit dessen Hilfe man Binomialkoeffizienten berechnen kann.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

<u>**(7.9) SATZ:**</u> Sei M eine endliche Menge mit n Elementen ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann gibt es genau $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ k–elementige Teilmengen von M .

<u>**Bew:**</u> Wir zeigen durch Induktion nach $n := |\,M\,| \in \mathbb{N}_0$, daß gilt: $|\,\mathcal{P}_k(M)\,| = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$.

(IA) $\underline{n=0} \implies M = \emptyset \implies |\,\mathcal{P}(M)\,| = |\,\mathcal{P}_0(M)\,| = 1$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1 \in \mathbb{N}$

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und die Behauptung richtig für alle endlichen Mengen mit n Elementen.

Sei $|\,M\,| = n+1$. Zz: $|\,\mathcal{P}_k(M)\,| \overset{!}{=} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$ für $0 \leq k \leq n+1$

$\underline{k=0}:$ $|\,\mathcal{P}_k(M)\,| = 1$ und $\dfrac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1$

$\underline{k=n+1}:$ $|\,\mathcal{P}_k(M)\,| = 1$ und $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!} = 1$

Sei $\underline{1 \leq k \leq n}$. $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, $N := M \setminus \{x_{n+1}\}$, $|\,N\,| = n$.

Für ein beliebiges $U \in \mathcal{P}_k(M)$ gilt dann genau einer der beiden folgenden Fälle:

1.Fall: $x_{n+1} \notin U \Longrightarrow U \subseteq N$. Nach (IV) gibt es $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ Möglichkeiten für U.

2.Fall: $x_{n+1} \in U \implies U = \overbrace{(U \setminus \{x_{n+1}\})}^{=V} \,\dot\cup\, \{x_{n+1}\}$ mit $V \in \mathcal{P}_{k-1}(N)$.
Für V (und damit U) gibt es nach (IV) $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten. Insgesamt also aus beiden Fällen $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ Möglichkeiten für U. □

(7.10) BEM: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} |\, \mathcal{P}_k(M)\,| = |\, \mathcal{P}(M)\,| = 2^n$

Beispiele: **1.** Wieviele Tipreihen gibt es beim Lotto 6 aus 49?

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

2. Wieviele Möglichkeiten für "3 Richtige" gibt es bei einer Ausspielung?

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{49-6}{3} = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246.820$$

Wahrscheinlichkeit für "3 Richtige":

$$W = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{246.820}{13.983.816} = 0,01765...$$

d.h. ca 1,8% aller möglichen Tipreihen bringen bei einer Ausspielung 3 Richtige.

3. Wieviele Möglichkeiten gibt es, beim Skatspiel (32 Karten) ein Blatt aus 10 Karten zu bekommen?

$\binom{32}{10} = 64.512.240$ (Mehr Möglichkeiten als in 1.!)

4. Wieviele Möglichkeiten gibt es beim Skatspiel, genau 3 Buben und 2 Asse zu bekommen?

$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{24}{5} = 1.020.096$ Die Wahrscheinlichkeit ist 0,01581...

Woher kommt der Name Binomialkoeffizient?

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a^1 + b^1$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

(7.11) SATZ: **(Binomialsatz)** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$