§7 Endliche Mengen

(7.1) DEF: M und N seien nichtleere Mengen.

a) M heißt **gleichmächtig** zu N (in Zeichen: $M \sim N$), wenn es eine bijektive Abbildung $M \longrightarrow N$ gibt.

b) M heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $M \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. n wird dann die **Anzahl der Elemente von** M genannt. Bezeichnung: $n =: |M|$.

c) Die leere Menge ist endlich mit $|\,\emptyset\,| = 0$.

d) Ist M nicht endlich, so heißt M **unendlich** ($|M| = \infty$).

(7.2) BEM: a) $\mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge. Die Annahme, daß $\mathbb{N}$ endlich ist, führt auf einen Widerspruch.

b) Eine Menge M heißt **abzählbar unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt, wenn also $M \sim \mathbb{N}$ gilt. Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind alle abzählbar unendlich. Bei einer unendlichen Menge spricht man von der **Kardinalzahl** oder **Mächtigkeit** als Maß für die Größe dieser Menge. Die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$ wird mit $\aleph_0$ bezeichnet ($\aleph$ ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets). Gleichmächtige Menge haben dieselbe Kardinalzahl. Es gilt $|\,\mathbb{N}\,| = |\,\mathbb{N}_0\,| = |\,\mathbb{Z}\,| = |\,\mathbb{Q}\,| = \aleph_0$.

Es ist sicher überraschend, daß $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ dieselbe Mächtigkeit haben (der Beweis wurde in der Vorlesung angedeutet), obwohl $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist. Dagegen kann eine endliche Menge nie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein. Daß $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind, beweist man mit dem **2. Cantor'schen Diagonalverfahren**.

c) Die Menge $\mathbb{R}$ ist unendlich, es gibt aber keine Bijektion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$. (Das läßt sich mit dem **1. Cantor'sches Diagonalverfahren** beweisen.) Man sagt: $\mathbb{R}$ hat eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$, oder $\mathbb{R}$ ist **überabzählbar**. $|\,\mathbb{R}\,| = \aleph_1$. Die **Kontinuumshypothese** besagt, daß es zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ keine weitere Kardinalzahl gibt.

(7.3) SATZ: a) M und N seien nichtleere Mengen, und $f : M \longrightarrow N$ sei eine bijektive Abbildung. Dann gilt: M ist genau dann endlich, wenn N endlich ist. In beiden Fällen ist dann $|\,M\,| = |\,N\,|$.

b) Ist M endlich, so ist auch jede Teilmenge $T \subseteq M$ endlich, und es gilt $|\,T\,| \leq |\,M\,|$.

(7.4) SATZ: Für endliche Mengen M und N gilt:

a) $M \cup N$ ist endlich und $|\,M \cup N\,| = |\,M\,| + |\,N\,| - |\,M \cap N\,|$

b) Im Falle $M \cap N = \emptyset$ ist $|\,M \cup N\,| = |\,M\,| + |\,N\,|$.

c) $M \cap N$ ist endlich und $0 \leq |\,M \cap N\,| \leq \min(|\,M\,|, |\,N\,|)$.

d) Im Falle $M \subseteq N$ ist $N \setminus M$ endlich und $|\,N \setminus M\,| = |\,N\,| - |\,M\,|$.

e) $M \times N$ ist endlich und $|\,M \times N\,| = |\,M\,| \times |\,N\,|$.