(6.9) SATZ: Rekursive Definition einer Abbildung

Es sei M eine Menge. Eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow M$ ist eindeutig definiert, wenn man

i) $f(0)$ festlegt,

ii) eine Vorschrift angibt, nach der man für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Funktionswert $f(n+1)$ aus den Funktionswerten $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n)$ bestimmen kann.

(6.10) BEISPIELE: a) Die **n–te Potenz** einer reellen Zahl x $(n \in \mathbb{N}_0)$

$p_x : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_x(0) := 1$, $p_x(n+1) := p_x(n) \cdot x$

Bezeichnung: $p_x(n) =: x^n$.

b) Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl:

$f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(0) := 1$, $f(n+1) := f(n) \cdot (n+1)$

Bezeichnung: $f(n) =: n!$ (lies n Fakultät)

c) Die Summe von endlich vielen reellen Zahlen

Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ eine endliche Folge reeller Zahlen (oder auch ein n–Tupel aus $\mathbb{R}^n$). Die Summe S_n aller Folgenglieder ist definiert durch

$S_0 := 0$, $S_n := S_{n-1} + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bezeichnung: $S_n =: \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

d) Das Produkt von endlich vielen reellen Zahlen

Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ eine endliche Folge reeller Zahlen (oder auch ein n–Tupel aus $\mathbb{R}^n$). Das Produkt P_n aller Folgenglieder ist definiert durch

$P_0 := 1$, $P_n := P_{n-1} \cdot x_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bezeichnung: $P_n =: \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$

e) Die Fibonacci–Zahlen

Die n–te Fibonacci–Zahl $(n \in \mathbb{N}_0)$ ist rekursiv definiert durch

$F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Eine **explizite Formel** für die Fibonacci–Zahlen:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Man kann diese Formel über die "erzeugende Funktion" der Fibonacci–Zahlen finden. Wenn das Ergebnis bekannt ist, läßt es sich auch mit vollständiger Induktion nachweisen.