(6.2) SATZ: Beweis durch vollständige Induktion, 1. Version

Es sei $A(n)$ ein Prädikat ($n \in \mathbb{N}$). Kann man dann die beiden folgenden Eigenschaften beweisen:

i) $A(1)$ ist richtig,

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ für eine **beliebige** natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$,

so ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Formal läßt sich ii) schreiben als $\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, A(n) \implies A(n+1)$

Bezeichnungen: Ein Induktionsbeweis besteht immer aus 2 Beweis–Teilen:

1) dem **Induktionsanfang (IA)**

hier wird bewiesen, daß die Behauptung für $n = 1$ richtig ist

2) dem **Induktionsschluß (IS)** oder dem "**Schluß von** n **auf** $n+1$":

hier wird unter der **Induktionsvoraussetzung (IV)**, daß die Behauptung für eine beliebige (aber feste) natürliche Zahl n richtig ist, die **Induktionsbehauptung (IB)** bewiesen, daß dann die Behauptung auch für $n+1$ richtig ist.

(6.3) PEANO–Axiome für die natürlichen Zahlen:

P$_1$) 1 ist eine natürliche Zahl

P$_2$) Jede natürliche Zahl n besitzt eine natürliche Zahl n' als **Nachfolger**

P$_3$) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

P$_4$) Haben zwei natürliche Zahlen denselben Nachfolger, so sind sie gleich

P$_5$) **Induktionsprinzip**
Eine Menge T natürlicher Zahlen, die 1 enthält und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger, enthält **alle** natürlichen Zahlen.

Ordnet man jeder natürlichen Zahl ihren Nachfolger zu, so wird dadurch eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert. Diese Abbildung ν ist injektiv (P$_4$) , aber nicht surjektiv, da $1 \notin \text{Bild}(\nu)$ (P$_3$). Etwas formaler:

P$_1$) $1 \in \mathbb{N}$

P$_2$) $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, n' \in \mathbb{N} \,:\, n' = n+1$

P$_3$) $\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, n' \neq 1$

P$_4$) $\forall\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, m' = n' \implies m = n$

P$_5$) **Induktionsprinzip**
Ist $T \subseteq \mathbb{N}$ mit **i)** $1 \in T$ und **ii)** $\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \in T \implies n' \in T$,
so folgt $T = \mathbb{N}$.

(6.6) SATZ: Beweis durch vollständige Induktion, 2. Version

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl und $A(n)$ ein Prädikat $(n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0)$. Kann man dann die beiden folgenden Eigenschaften beweisen:

i) $A(n_0)$ ist richtig,

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ für eine **beliebige** natürliche Zahl $n \geq n_0$ folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$,

so ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ richtig.

(6.7) SATZ: Beweis durch vollständige Induktion, 3. Version

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl und $A(n)$ ein Prädikat $(n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0)$. Kann man dann die beiden folgenden Eigenschaften beweisen:

i) $A(n_0)$ ist richtig,

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n_0)\,,\ A(n_0+1)\,,\ A(n_0+2)\,,\ldots,\ A(n)$ für eine **beliebige** natürliche Zahl $n \geq n_0$ folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$,

so ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ richtig.

Auch hier die zweite Bedingung noch einmal etwas formaler:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \;:\; (\forall\, k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n \;:\; A(k)) \quad \Longrightarrow \quad A(n+1)$$