(5.3) DEF: $f : M \longrightarrow N$ und $g : M' \longrightarrow N'$ seien Abbildungen. Dann ist die Gleichheit $f = g$ definiert durch:

$$f = g \; :\iff \begin{cases} M = M' \\ N = N' \\ \forall\, x \in M : f(x) = g(x) \end{cases}$$

Sind $f, g : M \longrightarrow N$ zwei Abbildungen mit demselben Definitionsbereich und derselben Wertemenge,so gilt:

$$f = g \iff \forall\, x \in M : f(x) = g(x)$$

$$f \neq g \iff \exists\, x \in M : f(x) \neq g(x)$$

(5.4) DEF: $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung.

a) Für eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt $f(U) := \{\, f(x) \,|\, x \in U \,\} \subseteq N$ die **Bildmenge von U unter f.**

b) Für eine Teilmenge $V \subseteq N$ heißt $f^{-1}(V) := \{\, x \,|\, x \in M, f(x) \in V \,\} \subseteq M$ die **Urbildmenge von V unter f.**

Achtung: $f^{-1}(V)$ ist die Menge aller Urbilder von allen Elementen aus V. Dies hat **nichts** mit der Existenz einer Umkehrabbildung zu tun!

(5.5) DEF: Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen, so ist die Abbildung $g \circ f : M \longrightarrow P$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\forall\, x \in M)$$

$g \circ f$ heißt die **Hintereinanderausführung** von f und g.

Bemerkung: Der Graph $G_{g \circ f}$ der Hintereinanderausführung ist gleich der Verknüpfung $G_g \circ G_f$ der beiden Relationen G_g und G_f, wie sie in (4.2a) definiert ist, d.h. es gilt $G_{g \circ f} = G_g \circ G_f$.

(5.6) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ und $h : P \longrightarrow Q$ gilt

$$(h \circ g) \circ f \;=\; h \circ (g \circ f)$$

d.h. es gilt das **Assoziativ–Gesetz** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

(5.7) DEF: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a) f heißt **injektiv**, wenn verschiedene Elemente aus M stets verschiedene Bildwerte unter f haben.

b) f heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus N (mindestens) ein Urbild unter f besitzt.

c) f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Wir schreiben diese Eigenschaften einmal formal auf:

(5.8) BEM: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a) f injektiv $\iff (\forall x_1 \in M \,\forall x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

$\iff (\forall x_1 \in M \,\forall x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$

b) f surjektiv $\iff (\forall y \in N \,\exists x \in M : y = f(x))$.

Untersuchung der Beispiele auf Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität (s. Beispiele, 20./24.11.2000)

(5.9) SATZ: $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ seien Abbildungen. Dann gilt:

a) Sind f und g beide injektiv (surjektiv bzw. bijektiv), so ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv bzw. bijektiv).

b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist f injektiv (g surjektiv).

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(5.10) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist bijektiv

b) Es existiert eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$.

Zusatz: Ist f bijektiv, so ist die Abbildung g aus b) eindeutig bestimmt und selbst wieder bijektiv.

(5.11) DEF: Die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sei bijektiv. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$ die **Umkehrabbildung von** f oder die **zu** f **inverse Abbildung**. **Bezeichnung:** $g = f^{-1}$.

Achtung: Nur eine bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung. Die Bezeichnung f^{-1} macht erst dann Sinn, wenn klar ist, daß f bijektiv ist.